円周率を求めるアルキメデスの方法の加速

半径１の円について，内接する正 n 角形の周の長さの半分を p_n，外接する正 n 角形の周の長さの半分を q_n とする。このとき， $p_n = n\sin\frac{\pi}{n}$，$q_n = n\tan\frac{\pi}{n}$ である。

アルキメデスは次の命題を幾何を用いて示したが，ここでは三角関数を用いて示す。

命題

$$q_{2n} = \frac{2p_n q_n}{p_n + q_n} \quad , \quad p_{2n} = \sqrt{p_n q_{2n}}$$

すなわち， q_{2n} は p_n と q_n の調和平均， p_{2n} は p_n と q_{2n} の幾何平均(相乗平均)である。

証明

$q_n = n\tan\frac{\pi}{n}$ であり

$$2\tan\frac{\theta}{2} = \frac{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{\cos^2\frac{\theta}{2}} = \frac{\sin\theta}{\frac{1+\cos\theta}{2}} = \frac{2}{\frac{1}{\sin\theta} + \frac{\cos\theta}{\sin\theta}} = \frac{2}{\frac{1}{\sin\theta} + \frac{1}{\tan\theta}}$$

であるから

$$q_{2n} = \frac{2}{\frac{1}{p_n} + \frac{1}{q_n}} = \frac{2p_n q_n}{p_n + q_n}$$

また， $p_n = n\sin\frac{\pi}{n}$ であり

$$2\sin\frac{\theta}{2} = 2\sqrt{\sin^2\frac{\theta}{2}} = \sqrt{2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}\cdot 2\tan\frac{\theta}{2}} = \sqrt{\sin\theta\cdot 2\tan\frac{\theta}{2}}$$

であるから

$$p_{2n} = \sqrt{p_n q_{2n}}$$

証明終

半径１の円について，内接する正 $2n$ 角形の面積は $n\sin\frac{\pi}{n}$ で p_n に等しく，外接する正 n 角形に面積は $n\tan\frac{\pi}{n}$ で， q_n に等しい。そこで，円を放物線で近似することにより，放物線と直線で囲まれた図形の面積を用いて， p_n，q_n よりも精密な円周率の近似値を求め，次の命題を示す。

命題

$$p_n<\frac{1}{3}\left(4p_n-p_{\frac{n}{2}}\right)<\pi<\frac{1}{3}\left(2q_n+p_{\frac{n}{2}}\right)<q_n$$

証明

近似 p_n を精密化し，π の値を下から抑える。そのため， $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ として，座標平面上の原点を中心とする半径 1 の円上の 3 点

$$(-\sin\theta,\ \cos\theta),\ (0,\ 1),\ (\sin\theta,\ \cos\theta)$$

を通る放物線 $C: y=1-\dfrac{1-\cos\theta}{\sin^2\theta}x^2$ を考える。

ここで， $-\sin\theta<x<\sin\theta,\ x\neq 0$ において C は半円 $y=\sqrt{1-x^2}$ の下側にある。

このとき，C と直線 $x=-\sin\theta,\ x=\sin\theta$ および x 軸で囲まれた図形の面積は，

$$2\int_0^{\sin\theta}\left(1-\frac{1-\cos\theta}{\sin^2\theta}x^2\right)dx=2\left[x-\frac{1-\cos\theta}{3\sin^2\theta}x^3\right]_0^{\sin\theta}=\frac{4}{3}\sin\theta+\frac{2}{3}\sin\theta\cos\theta$$

なお，この積分値はシンプソンの公式を用いても求まる。

これより，$y\geqq 0$ の部分で C と直線 $y=\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}x,\ y=-\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}x$ で囲まれた図形の面積 S は

$$S=\frac{4}{3}\sin\theta+\frac{2}{3}\sin\theta\cos\theta-\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{3}(4\sin\theta-\sin\theta\cos\theta)=\frac{1}{3}\left(4\sin\theta-\frac{1}{2}\sin 2\theta\right)$$

$\theta=\dfrac{\pi}{n}$ のとき，

$$S=\frac{1}{3}\left(4\sin\frac{\pi}{n}-\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{n}\right)$$

S の n 倍が半径が 1 の円の面積の近似となるから

$$\pi\approx\frac{n}{3}\left(4\sin\frac{\pi}{n}-\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{n}\right)=\frac{1}{3}\left(4n\sin\frac{\pi}{n}-\frac{n}{2}\sin\frac{2\pi}{n}\right)$$

この近似式を p_n で表すと次のようになる。

$$\pi\approx\frac{1}{3}\left(4p_n-p_{\frac{n}{2}}\right)\qquad \text{ただし，}\quad p_n<\frac{1}{3}\left(4p_n-p_{\frac{n}{2}}\right)<\pi$$

次に，近似 q_n を精密化し，π の値を上から抑える。そのために，2 点

$$(-\sin\theta,\ \cos\theta),\ (\sin\theta,\ \cos\theta)$$

において，円 $x^2+y^2=1$ に接する放物線 $D: y=\dfrac{2-\sin^2\theta}{2\cos\theta}-\dfrac{1}{2\cos\theta}x^2$ を考える。

ここで， $-\sin\theta<x<\sin\theta$ において D は半円 $y=\sqrt{1-x^2}$ の上側にある。

このとき，D と直線 $x=-\sin\theta,\ x=\sin\theta$ および x 軸で囲まれた図形の面積は，

$$2\int_0^{\sin\theta}\left(\frac{2-\sin^2\theta}{2\cos\theta}-\frac{1}{2\cos\theta}x^2\right)dx=2\left[\frac{2-\sin^2\theta}{2\cos\theta}x-\frac{1}{6\cos\theta}x^3\right]_0^{\sin\theta}=2\tan\theta-\frac{4}{3}\cdot\frac{\sin^3\theta}{\cos\theta}$$

$$=2\tan\theta-\frac{4}{3}\cdot\frac{\sin\theta(1-\cos^2\theta)}{\cos\theta}=\frac{2}{3}\tan\theta+\frac{4}{3}\sin\theta\cos\theta$$

これより，$y \geqq 0$ の部分でDと直線　$y=\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}x$，$y=-\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}x$　で囲まれた図形の面積Tは

$$T=\frac{2}{3}\tan\theta+\frac{4}{3}\sin\theta\cos\theta-\sin\theta\cos\theta=\frac{1}{3}(2\tan\theta+\sin\theta\cos\theta)=\frac{1}{3}\left(2\tan\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right)$$

$\theta=\dfrac{\pi}{n}$　のとき，

$$T=\frac{1}{3}\left(2\tan\frac{\pi}{n}+\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{n}\right)$$

T の n 倍が半径が1の円の面積の近似となるから

$$\pi\approx\frac{n}{3}\left(2\tan\frac{\pi}{n}+\frac{1}{2}\sin\frac{2\pi}{n}\right)=\frac{1}{3}\left(2n\tan\frac{\pi}{n}+\frac{n}{2}\sin\frac{2\pi}{n}\right)$$

この近似式を p_n，q_n で表すと次のようになる。

$$\pi\approx\frac{1}{3}\left(2q_n+p_{\frac{n}{2}}\right)\qquad\text{ただし，}\qquad\pi<\frac{1}{3}\left(2q_n+p_{\frac{n}{2}}\right)<q_n$$

証明終

例　n=12のとき

$$p_{12}=12\sin\frac{\pi}{12}=3(\sqrt{6}-\sqrt{2})\approx 3.10582854123025$$

$$q_{12}=12\tan\frac{\pi}{12}=12(2-\sqrt{3})\approx 3.21539030917347$$

$$\frac{1}{3}(4p_{12}-p_6)=\frac{12}{3}\left(4\sin\frac{\pi}{12}-\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{6}\right)=4\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}-\frac{1}{4}\right)=4\sqrt{2}(\sqrt{3}-1)-1\approx 3.14110472164033$$

$$\frac{1}{3}(2q_{12}+p_6)=\frac{12}{3}\left(2\tan\frac{\pi}{12}+\frac{1}{2}\sin\frac{\pi}{6}\right)=4\left(4-2\sqrt{3}+\frac{1}{4}\right)=17-8\sqrt{3}\approx 3.14359353944898$$

よって　$3.141\cdots\cdots<\pi<3.143\cdots\cdots$

円周率がほぼ3.14であることが示された。

テーラー展開による方法

$$\sin x=x-\frac{1}{6}x^3+\frac{1}{120}x^5-\frac{1}{5040}x^7+\cdots\cdots\qquad\cdots①$$

$$\tan x=x+\frac{1}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5+\frac{17}{315}x^7+\cdots\cdots\qquad\cdots②$$

t を定数として，$(1-t)\sin x+t\tan x$ の x^3 の項が無くなるように t の値を定めると，$t=\dfrac{1}{3}$ であり

$$\frac{2}{3}\sin x+\frac{1}{3}\tan x=x+\frac{1}{20}x^5+\cdots\cdots$$

よって，$x>0$ で x が十分小さければ

$$x<\frac{2}{3}\sin x+\frac{1}{3}\tan x$$

$x=\dfrac{\pi}{n}$ とし，両辺に n を掛けると

$$\pi<\frac{2}{3}n\sin\frac{\pi}{n}+\frac{1}{3}n\tan\frac{\pi}{n}$$

したがって　$\pi<\dfrac{2}{3}p_n+\dfrac{1}{3}q_n$

①，②だけでなく，次の③，④も利用しよう。

$$\frac{1}{2}\sin 2x=x-\frac{2}{3}x^3+\frac{2}{15}x^5-\frac{4}{315}x^7+\cdots\cdots \qquad \cdots③$$

$$\frac{1}{2}\tan 2x=x+\frac{4}{3}x^3+\frac{32}{15}x^5+\frac{1088}{315}x^7+\cdots\cdots \qquad \cdots④$$

$(1-t)\sin x+t\cdot\dfrac{1}{2}\sin 2x$ の x^3 の項が無くなるように t の値を定めると，$t=-\dfrac{1}{3}$ であり

$$\frac{4}{3}\sin x-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\sin 2x=x-\frac{1}{30}x^5+\cdots\cdots$$

よって，$x>0$ で x が十分小さければ

$$\frac{4}{3}\sin x-\frac{1}{3}\cdot 2\sin\frac{x}{2}<x$$

$x=\dfrac{\pi}{n}$ とし，両辺に n を掛けると

$$\frac{4}{3}n\sin\frac{\pi}{n}-\frac{1}{3}\cdot 2n\sin\frac{\pi}{2n}<\pi$$

したがって　$\dfrac{4}{3}p_n-\dfrac{1}{3}p_{\frac{n}{2}}<\pi$

$(1-t)\cdot\dfrac{1}{2}\sin 2x+t\tan x$ の x^3 の項が無くなるように t の値を定めると，$t=\dfrac{2}{3}$ であり

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\sin 2x+\frac{2}{3}\tan x=x+\frac{2}{15}x^5+\cdots\cdots$$

したがって　$\pi<\dfrac{2}{3}q_n+\dfrac{1}{3}p_{\frac{n}{2}}$

$(1-t)\tan x+t\cdot\dfrac{1}{2}\tan 2x$ の x^3 の項が無くなるように t の値を定めると，$t=-\dfrac{1}{3}$ であり

$$\frac{4}{3}\tan x-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\tan 2x=x-\frac{8}{15}x^5+\cdots\cdots$$

したがって　　$\frac{4}{3}q_n-\frac{1}{3}q_{\frac{n}{2}}<\pi$

x^5 の係数が小さい組み合わせは次の不等式である。

$$\frac{4}{3}p_n-\frac{1}{3}p_{\frac{n}{2}}<\pi<\frac{2}{3}p_n+\frac{1}{3}q_n$$

平方根の計算が 1 回少ない組み合わせは次の不等式である。

$$\frac{4}{3}q_n-\frac{1}{3}q_{\frac{n}{2}}<\pi<\frac{2}{3}q_n+\frac{1}{3}p_{\frac{n}{2}}$$

正六角形を初期状態としての十進 BASIC でのプログラムは次のようになり，精度(有効桁)が p_n,q_n の約 2 倍に加速されることが確かめられる。

```
OPTION ARITHMETIC DECIMAL_HIGH
LET p=3
LET q=2*SQR(3)
FOR i=1 TO 827
 LET p0=p
 LET q=2*p*q/(p+q)
 LET p=SQR(p*q)
 PRINT p-pi
 PRINT (4*p-p0)/3-pi
 PRINT (2*p+q)/3-PI
NEXT i
END
```

一般化

$\lim_{n\to\infty}2^n\sin\frac{\theta}{2^n}=\theta$ であるから，　$2^n\sin\frac{\theta}{2^n}$ は θ の近似値である。

$\sin\theta, 2\sin\frac{\theta}{2}, 2^2\sin\frac{\theta}{2^2},\cdots\cdots,2^n\sin\frac{\theta}{2^n}$ の値が分かったとき，　$2^n\sin\frac{\theta}{2^n}$ よりも精密な θ の近似値を高速に求めることを考える。最も簡単な方法は

$$y=\sin\frac{\theta}{2^n} \quad として，\quad \theta=2^n \arcsin y=2^n\left(y+\frac{1}{6}y^3+\frac{3}{40}y^5+\cdots\cdots\right)$$

とテーラー展開によって求めることである。

ここでは，　$\sin\theta, 2\sin\frac{\theta}{2}, 2^2\sin\frac{\theta}{2^2}, \cdots\cdots, 2^n\sin\frac{\theta}{2^n}$ の全てを使い，逆関数のテーラー展開を用いない方法を考える。

マクローリン展開が可能な奇関数 $f(x)$ を考える。 $\sin x$，$\tan x$ はこれに該当する。

$$f(x),\ f\left(\frac{x}{2}\right),\ f\left(\frac{x}{2^2}\right),\cdots\cdots\ f\left(\frac{x}{2^n}\right)$$

の各値が分かったときに x の近似値を求める。

$f(x)$ は奇関数であるから， $f(x)$ をマクローリン展開すると次のようになる。

$$f(x)=a_0x+a_1x^3+a_2x^5+a_3x^7+\cdots\cdots \qquad \cdots①$$

よって

$$2f\left(\frac{x}{2}\right)=a_0x+\frac{a_1}{4}x^3+\frac{a_2}{4^2}x^5+\frac{a_3}{4^3}x^7+\cdots\cdots \qquad \cdots②$$

$$4f\left(\frac{x}{4}\right)=a_0x+\frac{a_1}{16}x^3+\frac{a_2}{16^2}x^5+\frac{a_3}{16^3}x^7+\cdots\cdots \qquad \cdots③$$

$$8f\left(\frac{x}{8}\right)=a_0x+\frac{a_1}{64}x^3+\frac{a_2}{64^2}x^5+\frac{a_3}{64^3}x^7+\cdots\cdots \qquad \cdots④$$

$$\cdots\cdots$$

①，②より a_0x は残し x^3 の項を消去すると

$$\frac{4}{3}\cdot 2f\left(\frac{x}{2}\right)-\frac{1}{3}f(x)=a_0x-\frac{a_2}{4}x^5-\frac{5a_3}{16}x^7+\cdots\cdots \qquad \cdots⑤$$

②，③より a_0x は残し x^3 の項を消去すると

$$\frac{4}{3}\cdot 4f\left(\frac{x}{4}\right)-\frac{1}{3}2f\left(\frac{x}{2}\right)=a_0x-\frac{a_2}{64}x^5-\frac{5a_3}{1024}x^7+\cdots\cdots \qquad \cdots⑥$$

③，④より x^3 の項を消去すると

$$\frac{4}{3}\cdot 8f\left(\frac{x}{8}\right)-\frac{1}{3}4f\left(\frac{x}{4}\right)=a_0x-\frac{a_2}{1024}x^5-\frac{5a_3}{65536}x^7+\cdots\cdots \qquad \cdots⑦$$

⑤，⑥の x^5 の係数は 16：1，⑥，⑦の x^5 の係数も 16：1 である。よって，

$$\frac{16}{15}\cdot⑥-\frac{1}{15}\cdot⑤=a_0x+\frac{a_3}{64}x^7+\cdots\cdots$$

$$\frac{16}{15}\cdot⑦-\frac{1}{15}\cdot⑥=a_0x+\frac{a_3}{4096}x^7+\cdots\cdots$$

さらに，これら 2 式から　x^7　の項が消去できる。

一般化するために，　$b_k=2^k f\left(\frac{x}{2^k}\right)$　$(k=0,\ 1,\ 2,\cdots\cdots)$　と置き，　$a_0 x$　の近似値を求める。

b_k　の k を 1 つ進める演算子を X，すなわち　$Xb_k=b_{k+1}$　と定める。このとき　$b_{n,m}$　を

$$b_{n,m}=\frac{1}{4^m-1}(4^m X-1)\cdots\cdots\frac{1}{63}(64X-1)\cdot\frac{1}{15}(16X-1)\cdot\frac{1}{3}(4X-1)b_n$$

と定めると，テーラー展開の　$x^3, x^5,\cdots,x^{2m+1}$　の項が無くなり $b_{n,m}$ は b_{n+m} より良い近似値となる。

例　$b_{0,2}=\frac{1}{15}(16X-1)\cdot\frac{1}{3}(4X-1)b_0=\frac{1}{45}(64X^2-20X+1)b_0=\frac{1}{45}(64b_2-20b_1+b_0)$

一般に　$b_k=2^k f\left(\frac{x}{2^k}\right)$　$(k=0,\ 1,\ 2,\cdots\cdots)$　から　$a_0 x$　のより良い近似値を求めるには，次の式の展開式を求めれば良い。

$$\frac{1}{4^m-1}(4^m X-1)\cdots\cdots\frac{1}{63}(64X-1)\cdot\frac{1}{15}(16X-1)\cdot\frac{1}{3}(4X-1)$$

この展開式の　X^k　の係数を　$c_{m,k}$　とすると

$$c_{m,k}=\frac{1}{4^m-1}(4^m c_{m-1,k-1}-c_{m-1,k})$$

変形して

$$c_{m,k}=c_{m-1,k-1}+\frac{1}{4^m-1}(c_{m-1,k-1}-c_{m-1,k})\quad ただし，\quad c_{m-1,-1}=0$$

$p_n=3\cdot 2^n\sin\frac{\pi}{3\cdot 2^n}$，$q_n=3\cdot 2^n\tan\frac{\pi}{3\cdot 2^n}$　として，上記の漸化式を用い，　p_n，q_n よりずっと良い π の近似値が求める十進 BASIC のプログラムを次に示す。

```
OPTION ARITHMETIC DECIMAL_HIGH
OPTION BASE 0
LET N=52
DIM c(N)
LET c(0)=1
LET d=1
FOR i=1 TO N
  LET temp=0
```

```
  LET d=d*4
  FOR k=0 TO i
    LET temp1=c(k)
    LET c(k)=temp+(temp-c(k))/(d-1)
    LET temp=temp1
  NEXT k
NEXT i
LET p=3
LET q=2*SQR(3)
LET s=c(0)*p
LET t=c(0)*q
FOR i=1 TO N
  LET q=2*p*q/(p+q)
  LET p=SQR(p*q)
  LET s=s+c(i)*p
  LET t=t+c(i)*q
NEXT i
PRINT s-pi
PRINT t-pi
END
```

次に，$b_{n,m}$ が満たす漸化式を求める。

$$b_{n,m}=\frac{1}{3}(4X-1)\frac{1}{15}(16X-1)\frac{1}{63}(64X-1)\cdots\cdots\frac{1}{4^{m-1}-1}(4^{m-1}X-1)\cdot\frac{1}{4^m-1}(4^mX-1)b_n$$

$$=\frac{1}{3}(4X-1)\frac{1}{15}(16X-1)\frac{1}{63}(64X-1)\cdots\cdots\frac{1}{4^{m-1}-1}(4^{m-1}X-1)\cdot\frac{1}{4^m-1}(4^mb_{n+1}-b_n)$$

よって

$$b_{n,m}=\frac{1}{4^m-1}(4^mb_{n+1,m-1}-b_{n,m-1})$$

変形して

$$b_{n,m}=b_{n+1,m-1}+\frac{1}{4^m-1}(b_{n+1,m-1}-b_{n,m-1})$$

例

$$b_{0,1}=\frac{1}{3}(4b_{1,0}-b_{0,0})=\frac{1}{3}(4b_1-b_0)$$

$$b_{0,2}=\frac{1}{15}(16b_{1,1}-b_{0,1})=\frac{1}{15}\left\{\frac{16}{3}(4b_2-b_1)-\frac{1}{3}(4b_1-b_0)\right\}=\frac{1}{45}(64b_2-20b_1+b_0)$$

この漸化式による十進 BASIC のプログラムは次のようになる。

```
OPTION ARITHMETIC DECIMAL_HIGH
OPTION BASE 0
LET N=52
DIM p(N)
LET p(0)=2*SQR(2)
LET q=4
FOR i=1 TO N
  LET temp1=p(0)
  LET q=2*p(0)*q/(p(0)+q)
  LET p(0)=SQR(p(0)*q)
  LET d=1
  FOR j=1 TO i
    LET d=d*4
    LET temp2=p(j)
    LET p(j)=p(j-1)+(p(j-1)-temp1)/(d-1)
    LET temp1=temp2
  NEXT J
  PRINT i,p(i)-PI
NEXT i
END
```