13 枚の金貨

金貨が 13 枚あって，その中に 1 枚だけ重さが違う偽金貨がある。偽金貨は，本物より重いか軽いか分からない。その偽金貨を，天秤を 3 回だけ使って見つけよ。ただし，偽金貨が本物より重いか軽いかを見分けなくて良いものとする。

定理　2 枚の金貨と本物の 1 枚の金貨

本物の金貨 1 枚を使えるとき，2 枚の金貨は，天秤を一度だけ使って偽金貨を見つけられる。

証明

左に 2 枚の金貨のうちの 1 枚を，右に本物の金貨 1 枚を乗せる。

つり合えば，乗せなかった金貨が偽金貨であり，つり合わなければ，乗せた金貨が偽金貨である。

□

定理　「重い」,「軽い」フラグ（旗）

天秤の左右に金貨を同数乗せて傾けば，重い側のすべての金貨に「重い」フラグを，軽い側のすべての金貨に「軽い」フラグを立てる。ある金貨に「重い」と「軽い」フラグが共に立てば，その金貨は本物である。

証明

「重い」フラグが立った金貨は，本物であるか，または，偽物で本物より重い金貨である。

「軽い」フラグが立った金貨は，本物であるか，または，偽物で本物より軽い金貨である。

よって，両方のフラグが立てば，その金貨は本物である。

□

定理　フラグの立った 3 枚の金貨

3 枚の金貨のすべてに，「重い」「軽い」フラグのいずれかが立っているとき，天秤を 1 度だけ使って偽金貨を見つけられる。

証明

2 枚以上に「重い」フラグが立っているときを考える。2 枚以上に「軽い」フラグ立っているときも同様である。「重い」フラグが立っている金貨を 1 枚ずつ，天秤の左右に乗せる。

左に傾けば，右の金貨には「重い」と「軽い」フラグが共に立つから本物である。よって，左の金貨がが偽物である。右に傾けば，同様にして右の金貨がが偽物である。

また，つり合えば，残りの金貨が偽金貨である。

□

解答

金貨に 1〜13 の番号をつける。 1 回目は，左に 1，2，3，4 を，右に 5，6，7，8 を乗せる。

(1) つり合った場合

偽の金貨は 9，10，11，12，13 のうちのどれかであり，残りは本物の金貨である。

2 回目は，左に 9，10 を，右に 11 と本物の金貨 1 枚を乗せる。

(a) つり合った場合

偽の金貨は 12，13 のうちのいずれかであるので，あと 1 回で偽金貨を見つけられる。

(b) つり合わなかった場合

左に傾いたとする。

9，10 に「重い」フラグが，11 に「軽い」フラグが立つので，あと 1 回で偽金貨を見つけられる。
右に傾いた場合も同様である。

(2) つり合わなかった場合

9，10，11，12，13 は本物の金貨である。
左に傾いたとしても，一般性は失わない。
このとき，1，2，3，4 に「重い」フラグが立ち，5，6，7，8 に「軽い」フラグが立つ。
2 回目は，左に 1，2，5（重，重，軽）を，右に 3，6，9（重，軽，本）を乗せる。

(a) つり合った場合

偽金貨は 4，7，8 のいずれかであり，4 には「重い」フラグが，7，8 には「軽い」フラグが立っているから，あと 1 回で偽金貨を見つけられる。

(b) つり合わなかった場合

(ｱ) 左に傾いた場合

3，5 には，「重い」と「軽い」フラグが共に立つから本物である。よって，偽金貨は 1，2，6 のいずれかであり，1，2 には「重い」フラグが，6 には「軽い」フラグが立っているから，あと 1 回で偽金貨を見つけられる。

(ｲ) 右に傾いた場合

同様にして，偽金貨は 3，5 のいずれかと分かるから，あと 1 回で偽金貨を見つけられる。

□

別解　(2)の 2 回目から
2 回目は，左に 1，2，5（重，重，軽）を，右に 3，4，6（重，重，軽）を乗せる。

(a) つり合った場合

偽金貨は 7，8 のいずれかであるから，あと 1 回で偽金貨を見つけられる。

(b) つり合わなかった場合

(ｱ) 左に傾いた場合

3，4，5 には，「重い」と「軽い」フラグが共に立つから本物である。よって，偽金貨は 1，2，6 のいずれかであり，1，2 には「重い」フラグが，6 には「軽い」フラグが立っているから，あと 1 回で偽金貨を見つけられる。

(ｲ) 右に傾いた場合

同様にして，偽金貨は 3，4，5 のいずれかと分かるから，あと 1 回で偽金貨を見つけられる。

註　「重い」と「軽い」は対称であるから，「重い」と「軽い」を入れ換える別解もある。

次に，金貨が 40 枚の場合に，偽金貨を天秤を 4 回だけ使って見つける問題を解く。そのために，次の定理を示す。

定理　フラグが立った 3^n 枚の金貨

3^n 枚の金貨のすべてに，「重い」「軽い」フラグのいずれかが立っているとき，天秤を n 回だけ使って偽金貨を見つけられる。

証明

[I] n＝1 のとき

フラグが立った3枚の金貨であるから，1回で偽金貨が見つかる。

[Ⅱ] $n=k$ のとき，定理が成り立つと仮定する。

3^{k+1} 枚の金貨のすべてに，「重い」「軽い」フラグのいずれかが立っているとき

「重い」フラグが立っている金貨 a 枚と「軽い」フラグが立っている金貨 $3^{k-1}-a$ 枚を，左右に置く。

左に傾けば，左の「軽い」フラグが立っている金貨 3^k-a 枚と，右の「重い」フラグが立っている金貨 a 枚が本物と分かり，天秤に乗せた残りの 3^k 枚の金貨のうちに偽金貨がある。

右に傾いて場合も同様である。

また，つり合えば，天秤に乗せなかった残りの 3^k 枚の金貨のうちに偽金貨がある。

よって，帰納法の仮定により，あと k 回で偽金貨を見つけられるから，$n=k+1$ のときもこの定理は成り立つ。

[Ⅰ]，[Ⅱ]により，任意の自然数 n について，この定理は成り立つ。

□

なお，3^n 枚より少ない場合に，天秤を n 度以下だけ使って偽金貨を見つけられることも明らかである。

解答

金貨に1～40の番号をつける。1回目は，左に1～13を，右に14～26を乗せる。

(1) つり合わなかった場合

13枚に「重い」フラグが，13枚に「軽い」フラグが立ち，14枚が本物である。

$13+13=26<27$ であるから，あと3回で偽金貨を見つけられる。

(2) つり合った場合

偽の金貨は27～40の14枚のうちのどれかであり，残りは本物の金貨である。

14枚のうち，5枚を左に，4枚と本物の金貨1枚を右に置く。

(a) つり合わなかった場合

フラグが付いた9枚の金貨から偽金貨を見つければ良いので，あと2回で見つけられる。

(b) つり合わなかった場合

天秤のに乗せなかった5枚のうち，2枚を左に，1枚と本物の金貨1枚を右に置く。

(ｱ) つり合わなかった場合

フラグが付いた3枚の金貨から偽金貨を見つければ良いので，あと1回で見つけられる。

(ｲ) つり合った場合

2枚の金貨から偽金貨を見つければ良いので，あと1回で見つけられる。

□

さらに一般化する。

定理　$(3^n-1)/2+1$ 枚の金貨と本物の1枚の金貨

$(3^n-1)/2+1$ 枚の金貨のうちに1枚だけ重さが違う偽金貨があり，さらに，本物の金貨が1枚あるとき，偽金貨は天秤を n 回だけ使って見つけられる。

証明

[Ⅰ] $n=1$ のとき

$(3^n-1)/2+1=2$ 枚であるから，1回で偽金貨を見つけられる。

[Ⅱ] $n=k$ のとき，定理が成り立つと仮定する。

$n=k+1$ のとき

$(3^{k+1}-1)/2+1$ 枚の金貨のうちに 1 枚だけ偽金貨があり，さらに，本物の金貨が 1 枚だけある。

本物か分からない金貨を，天秤の左に $((3^{k+1}-1)/2-1)/3+1$ 枚，右に $((3^{k+1}-1)/2-1)/3$ 枚乗せ，さらに右に本物の金貨を 1 枚乗せる。

(1) つり合わなかった場合

天秤に乗せた金貨の枚数は

$$((3^{k+1}-1)/2-1)/3\times 2+1=((3^{k+1}-1)-2)/3+1=(3^{k+1}-3)/3+1=3^{k} \text{ 枚}$$

で，これらの金貨にフラグが立つ。よって，あと k 回で偽金貨を見つけられる。

(2) つり合った場合

天秤に乗せなかった金貨は，

$$(3^{k+1}-1)/2-(3^{k+1}-3)/3=(3^{k+1}+3)/6=(3^{k}+1)/2=(3^{k}-1)/2+1 \quad \text{枚}$$

である。帰納法の仮定により，あと k 回で偽金貨を見つけられるから，$n=k+1$ のときもこの定理は成り立つ

[Ⅰ]，[Ⅱ]により，すべての自然数 n についてこの定理は成り立つ。

□

定理　$(3^{n}-1)/2$ 枚の金貨

$(3^{n}-1)/2$ 枚の金貨のうちに 1 枚だけ重さが違う偽金貨があるとき，偽金貨は天秤を n 回だけ使って見つけられる。

証明

天秤の左右に金貨を $((3^{n}-1)/2-1)/3$ 枚ずつ乗せる。

(1) つり合わなかった場合

$((3^{n}-1)/2-1)/3\times 2=((3^{n}-1)-2)/3=3^{n-1}-1$　枚

の金貨にフラグが立つ。

$3^{n-1}-1<3^{n-1}$ であるから，あと $n-1$ 回で偽金貨を見つけられる。

(2) つり合った場合

残りの金貨は，

$$(3^{n}-1)/2-(3^{n-1}-1)=(3\cdot 3^{n-1}-1)/2-3^{n-1}+1=(3^{n-1}-1)/2+1 \quad \text{枚}$$

である。他に本物の金貨が 1 枚以上あるから，あと $n-1$ 回で偽金貨を見つけられる。

□

定理　$(3^{n}-1)/2-1$ 枚の金貨

$(3^{n}-1)/2-1$（$n\geqq 2$）枚の金貨のうちに 1 枚だけ重さが違う偽金貨があるとき，偽金貨は天秤を n 回だけ使って見つけられ，しかも，本物より重いか軽いかも分かる。

証明

偽金貨にフラグが立てば，本物より重いか軽いかも分かるから，偽金貨にフラグが立たない場合を考えればよい。このとき，天秤を $n-1$ 回使うと偽金貨が 1 枚だけ残るから，それと本物の金貨 1 枚を天秤に乗せればよい。

□