合成関数の微分法の公式の厳密な証明

合成関数の微分法

$y=f(u)$ が u の関数として微分可能，　$u=g(x)$ が x の関数として微分可能ならば，関数 $y=f(u)$，$u=g(x)$ の合成関数 $y=f(g(x))$ も微分可能であり，次の公式が成り立つ。

$$\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

証明（数学Ⅲの教科書の証明）

x の増分 Δx に対する $u=g(x)$ の増分を Δu とし，

u の増分 Δu に対する $y=f(u)$ の増分を Δy とする。

ここで，$u=g(x)$ は連続であるから，$\Delta x \to 0$ のとき $\Delta u \to 0$ である。よって

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

$$=\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

証明終

教科書にある証明が厳密ではないことは，次のような例から分かる。

実数 $\delta>0$ がどんなに小さくても，区間 $(x-\delta,\ x+\delta)$ に $\Delta u=0$ となる Δx が無数に存在するような x の値がある関数 $u=g(x)$ について考える。

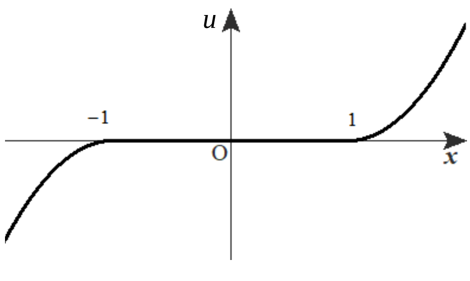
例

(1)　$x\leqq -1$ のとき $g(x)=-(x+1)^2$

$-1<x<1$ のとき $g(x)=0$

$1\leqq x$ のとき $g(x)=(x-1)^2$

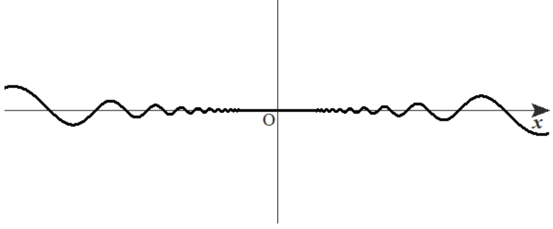
なる関数において $-1<x<1$ のとき



(2)　$g(0)=0$

$x\neq 0$ のとき $g(x)=x^2\sin\frac{1}{x}$

なる関数において $x=0$ のとき



「$\Delta x \to 0$ のとき $\Delta u \to 0$」は，「Δx が0と異なる値をとりながら0に限りなく近づくとき，Δu は0に限りなく近づく」という意味である。また，$\displaystyle\lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u}$ の $\Delta u \to 0$ は，「Δu が0と異なる値をとりながら0に限りなく近づく」という意味である。

すなわち，「$\Delta x \to 0$ のとき $\Delta u \to 0$」の $\Delta u \to 0$ と $\displaystyle\lim_{\Delta u \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta u}$ の $\Delta u \to 0$ では，「0と異なる値をとりながら」が入らないか，入るかという点で異なる。

Δu が0という値をとり得る場合は，$\dfrac{\Delta y}{\Delta u}$ は意味がなくなり，この証明は破綻する。

証明が厳密ではないが，公式は上記のような関数の場合にも成り立つ。そのことを証明してみよう。

上記のような関数 $u=g(x)$ の，実数 $\delta>0$ がどんなに小さくても，区間 $(x-\delta,\ x+\delta)$ に $\Delta u=0$ となる Δx が無数に存在するような x の値について，次のことが成り立つ。

(Ⅰ) $\dfrac{du}{dx}=0$　　(Ⅱ) $\dfrac{dy}{dx}=0$　　(Ⅲ) $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{dy}{du}\cdot\dfrac{du}{dx}$

証明

(Ⅰ) $\Delta u=0$ となる Δx の集合について，$\dfrac{\Delta u}{\Delta x}=0$ であるから $\displaystyle\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta u}{\Delta x}=0$

このことと，$u=g(x)$ は微分可能であることから，$\dfrac{du}{dx}=0$ である。

(Ⅱ) (1) ある $\delta>0$ が存在して，区間 $(x-\delta,\ x+\delta)$ で $g(x)$ が定数である場合

区間 $(x-\delta,\ x+\delta)$ で $y=f(g(x))$ も定数となるから

$$\frac{dy}{dx}=0$$

(2) (1)以外の場合

(ⅰ) $\Delta u=0$ となる Δx の集合について

$\Delta u=0$ ならば $\Delta y=0$ であるから，$\dfrac{\Delta y}{\Delta x}=0$

よって　$\displaystyle\lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x}=0$

(ⅱ) $\Delta u \neq 0$ となる Δx の集合について

$$\frac{\Delta y}{\Delta x}=\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}$$

ここで，$u=g(x)$ は連続であるから $\Delta x \to 0$ のとき $\Delta u \to 0$ である。よって

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}\left(\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}\right)=\lim_{\Delta u\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta u}\cdot\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta u}{\Delta x}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=\frac{dy}{dx}\cdot 0=0$$

(ⅰ)，(ⅱ)のいずれの場合も $\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=0$ となるから， $\frac{dy}{dx}$ が存在し， $\frac{dy}{dx}=0$ である。

(1)，(2)より， $\frac{dy}{dx}=0$ である。

(Ⅲ) $\frac{dy}{dx}=0$ ， $\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot 0=0$ であるから $\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$

証明終

合成関数の微分の公式の厳密な別証明

次の証明では， $\Delta u=0$ となる場合をうまく処理するために，新たな関数 $F(\Delta u)$ を定義する。

証明

微分可能な関数 $y=f(u)$ に対して， Δu の関数 $F(\Delta u)$ を次のように定義する。

$F(0)=f'(u)$ …①

$\Delta u\neq 0$ のとき $F(\Delta u)=\frac{\Delta y}{\Delta u}$ …②

このとき，①，②より，すべての Δu に対して次の等式が成り立つ。

$\Delta y=F(\Delta u)\cdot\Delta u$

したがって， $\Delta x\neq 0$ のとき

$\frac{\Delta y}{\Delta x}=F(\Delta u)\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}$ …③

また，②より

$\lim_{\Delta u\to 0}F(\Delta u)=f'(u)$ …④

ここで， $u=g(x)$ は連続であるから $\Delta x\to 0$ のとき $\Delta u\to 0$ である。

よって，①，④より

$\lim_{\Delta x\to 0}F(\Delta u)=f'(u)$ …⑤

したがって，③，⑤より

$$\frac{dy}{dx}=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=\lim_{\Delta x\to 0}F(\Delta u)\cdot\frac{\Delta u}{\Delta x}=f'(u)\cdot\frac{du}{dx}=\frac{dy}{du}\cdot\frac{du}{dx}$$

証明終