ディリクレのディオファントス近似定理

定理　a を任意の無理数とする。このとき,不等式

$$\left|a-\frac{y}{x}\right|<\frac{1}{x^2}$$

を満たす整数 x,y の組は無数に存在する。

証明　n を任意の自然数とする。

ka (k=1,2,3,⋯, n,n+1)の整数部分をq_k,小数部分をr_kとすると，a は無理数であるから

$$ka=q_k+r_k \quad \text{すなわち} \quad r_k=ka-q_k \quad (q_k\text{は整数，}\ 0<r_k<1)$$

r_k (k=1,2,3,⋯, n,n+1)は n 個の開区間$\left(0,\frac{1}{n}\right),\left(\frac{1}{n},\frac{2}{n}\right),\left(\frac{2}{n},\frac{3}{n}\right),\cdots,\left(\frac{n-1}{n},1\right)$のいずれかに属する。

このとき，r_kは n+1個あるから,鳩ノ巣原理により2個以上のr_kが属する区間がある。

$r_j,r_j(1\leqq i<j\leqq n+1)$が同じ区間に属するとすると

$$\left|r_j-r_i\right|<\frac{1}{n} \quad \text{すなわち} \quad \left|(j-i)a-(q_j-q_i)\right|<\frac{1}{n} \quad (1\leqq j-i\leqq n)$$

$j-i=x,\ q_j-q_i=y$とおくと

$$|xa-y|<\frac{1}{n} \quad (1\leqq x\leqq n) \quad \cdots①$$

1≦x≦n より $\frac{1}{n}\leqq\frac{1}{x}$ であるから

$$|xa-y|<\frac{1}{x} \quad \cdots②$$

ここで,②を満たす整数 x,y の組が有限個しか存在しないと仮定すると,$|xa-y|$に最小値が存在するが,a は無理数であるから最小値は正である。ところが,①において n は任意の自然数であるから, $|xa-y|$の値は限りなく0に近くすることができ, 矛盾する。よって, ②を満たす整数 x,y の組は無数に存在する。

②の両辺を x で割って　$\left|a-\frac{y}{x}\right|<\frac{1}{x^2}$　が得られる。

□

特に a>0のとき，$\left|a-\frac{y}{x}\right|<\frac{1}{x^2}$ を満たす自然数 x,y の組は無数に存在する。