フィボナッチ数列の項で，下 4 桁が 9999 であるものが存在する。

証明

フィボナッチ数列$\{a_n\}$は,

$$a_1=1,\, a_2=1$$

と漸化式,

$$a_{n+2}=a_{n+1}+a_n \quad (n=1,2,3,\cdots)$$

によって定まる。このとき

$$a_{n+2}\equiv a_{n+1}+a_n \quad (\mathrm{mod}\, b)$$

である。よって，a_nを自然数bで割った余りをr_nとすると

$$r_{n+2}=(r_{n+1}+r_n\text{ を }b\text{で割った余り}) \quad \cdots①$$

が成り立つ。

ここで，フィボナッチ数列の連続する項のbで割った余りの組(r_n,r_{n+1})を考えると，異なる(r_n,r_{n+1})の数の組は最大でb^2通りしかない。

したがって，b^2+1個の数の組

$$(r_1,r_2)，(r_2,r_3)，(r_3,r_4)，\cdots，(r_{p^2+1},r_{p^2+2})$$

の中には，必ず同じ数の組が存在するから（鳩の巣原理）

$$(r_k,r_{k+1})=(r_{k+t},r_{k+1+t})\cdots②$$

となる正の整数 t が存在する。

ここで，①により(r_n,r_{n+1})の値の組から，(r_{n+1},r_{n+2})の値の組がただ一通りに定まるから②より,

$$(r_{k+1},r_{k+2})=(r_{k+1+t},r_{k+2+t})$$

$$(r_{k+2},r_{k+3})=(r_{k+2+t},r_{k+3+t})$$

$$(r_{k+3},r_{k+4})=(r_{k+3+t},r_{k+4+t})$$

$$\cdots\cdots$$

が次々の成り立っていく。すなわち

$$(r_{k+i},r_{k+1+i})=(r_{k+i+t},r_{k+1+i+t}) \quad (i=0,1,2,3,\cdots)$$

が成り立つ。

t を周期という。また，このような t のうちで最小なものを基本周期といい，T で表すことにする。基本周期を単に周期ということが多い。

したがって

$$(r_{k+i},r_{k+1+i})=(r_{k+i+T},r_{k+1+i+T}) \quad (i=0,1,2,3,\cdots)\cdots③$$

ここで，漸化式を変形すると

$$a_n=a_{n+2}-a_{n+1} \quad (n=0,1,2,3,\cdots)$$

となるから

$$r_n=(r_{n+2}-r_{n+1}\text{ を }b\text{ で割った余り})$$

が成り立つ。したがって，これより(r_n,r_{n+1})の値の組から，(r_{n-1},r_n)の値の組がただ一通りに定まる。

ゆえに，③はiが負の整数でも成り立つ。ゆえに

$$(r_{k+i},r_{k+1+i})=(r_{k+i+T},r_{k+1+i+T}) \quad (i\text{ は任意の整数})$$

となる。したがって，任意の整数 k について

$$(r_k,r_{k+1})=(r_{k+T},r_{k+1+T}) \quad \cdots④$$

が成り立つ。

ここで，a_nの下 4 桁が 9999 になるということは，a_nを 10000 で割った余りが 9999 になるということである。ところで,

$$a_0=a_2-a_1=1-1=0$$

$$a_{-1}=a_1-a_0=1-0=1$$

$$a_{-2}=a_0-a_{-1}=0-1=-1$$

－1 を 10000 で割った余りは 9999 であるから　$r_{-2}=9999$　となる。（※）
ここで，④を用いると

$$(r_{-2},r_{-1})=(r_{-2+T},r_{-1+T})$$

が成り立ち，a_{-2+T} の下 4 桁は 9999 になる。明らかにＴ≧3 であるから，フィボナッチ数列の項で，下 4 桁が 9999 であるものが存在する。

（※）$a_n<0$ であるが，a_n を b で割った余りは，q を整数として，

$$a_n=bq+r_n,\quad 0\leqq r_n<p$$

を満たす整数 r_n と考えればよい。

註　実際にコンピュータで調べると，次のようになる。

```
LET a1=1
LET a2=1
FOR i=1 TO 100000
    LET x=MOD(a1+a2,10000)
    LET a1=a2
    LET a2=x
    IF a2=9999 THEN PRINT i+2,a1,a2
next I
END
```

14998	2	9999
29998	2	9999
44998	2	9999
59998	2	9999
74998	2	9999
89998	2	9999

最初に下４桁が 9999 になるのは a_{14998} であり，周期は 15000 である。

なお，下２桁が 99 になるものを調べると，次のようになる。

```
LET a1=1
LET a2=1
FOR i=1 TO 1000
    LET x=MOD(a1+a2,100)
    LET a1=a2
    LET a2=x
    IF a2=99 THEN PRINT i+2,a1,a2
next I
END
```

52	74	99
298	2	99
352	74	99
598	2	99
652	74	99
898	2	99
952	74	99

周期は 300 であり，周期自体に規則性がありそうです。