高次収束のニュートン法

ニュートン法は2次収束であるが，それを拡張して高次収束のニュートン法を導出する。高次収束のニュートン法は，2次収束のニュートン法と比べて計算量的に有利になることはない。なぜなら，例えば2次収束を2回を行うとき，1回目は有効桁が小さくても良いため計算量も小さくできるが，4次収束の場合はどの項も同じ有効桁で計算するからである。ただし，乗算の回数だけで速度が決まるような場合は，若干だけ速く収束することがある。

漸化式の導出

$f^{-1}(x)$ の値は少ない計算量で求められるが，$f(x)$ の値を求めるには計算量が大きい場合に，$f^{-1}(x)$ の値を求めることにより $f(a)$ を求める漸化式を導く。

まず，第0近似として，$f(a)$ の粗い近似値 y_0 を求める。$x_0 = f^{-1}(y_0)$ とすると，x_0 は a に近い値となる。よって，$h = a - x_0$ と置くと，h の絶対値は小さい。$a = x_0 + h$ であるから

$$f(a) = f(x_0 + h)$$

右辺をテーラー展開すると

$$\begin{aligned} f(a) &= f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{1}{2!}f''(x_0)h^2 + \frac{1}{3!}f'''(x_0)h^3 + \cdots\cdots \\ &= y_0 + f'(x_0)h + \frac{1}{2!}f''(x_0)h^2 + \frac{1}{3!}f'''(x_0)h^3 + \cdots\cdots \end{aligned}$$

ここで，$x_0 = f^{-1}(y_0)$，$h = a - x_0$ であるから，$f(a)$ は y_0 だけで表される。

$f'(x_0), f''(x_0), f'''(x_0), \cdots\cdots$ が少ない計算量で求められれば，$f(a)$ の高次近似が得られる。
これを用いると，例えば，$f(a)$ に4次収束する y_n, y_{n+1} についての漸化式は，次のようになる。

$$y_{n+1} = y_n + f'(x_n)h + \frac{1}{2!}f''(x_n)h^2 + \frac{1}{3!}f'''(x_n)h^3$$

ただし，$x_n = f^{-1}(y_n)$，$h = a - f^{-1}(y_n)$

通常のニュートン法との関係

2次収束の場合

$$y_{n+1} = y_n + f'(x_n)h$$

となるが，$f^{-1}(y) = g(y)$ とおくと，$x = g(y)$ であるから，

$$f'(x) = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{g'(y)}$$

よって，$f'(x_n) = \dfrac{1}{g'(y_n)}$ であるから

$$y_{n+1} = y_n - \frac{g(y_n) - a}{g'(y_n)}$$

となる。これは，通常のニュートン法と一致する。

3 次収束の場合

$$f''(x)=\left(\frac{1}{g'(y)}\right)'=-\frac{g''(y)}{\{g'(y)\}^2}\cdot\frac{dy}{dx}=-\frac{g''(y)}{\{g'(y)\}^2}\cdot\frac{1}{g'(x)}=-\frac{g''(y)}{\{g'(y)\}^3}$$

これを

$$y_{n+1}=y_n+f'(x_n)h+\frac{1}{2!}f''(x_n)h^2$$

に代入して

$$y_{n+1}=y_n-\frac{g(y_n)-a}{g'(y_n)}-\frac{g''(y_n)}{2!\{g'(y_n)\}^3}\cdot\{a-g(y_n)\}^2$$

整理して

$$y_{n+1}=y_n-\frac{g(y_n)-a}{g'(y_n)}\cdot\left[1+\frac{\{g(y_n)-a\}g''(y_n)}{2\{g'(y_n)\}^2}\right]$$

が得られる。

$g(y_n)-a$ が十分に小さいときに，さらに変形する。

$$1+\frac{\{g(y_n)-a\}g''(y_n)}{2\{g'(y_n)\}^2}\approx\left[1-\frac{\{g(y_n)-a\}g''(y_n)}{2\{g'(y_n)\}^2}\right]^{-1}=\frac{2\{g'(y_n)\}^2}{2\{g'(y_n)\}^2-\{g(y_n)-a\}g''(y_n)}$$

であるから，漸化式は

$$y_{n+1}=y_n-\frac{g(y_n)-a}{g'(y_n)}\cdot\frac{2\{g'(y_n)\}^2}{2\{g'(y_n)\}^2-\{g(y_n)-a\}g''(y_n)}$$

すなわち

$$y_{n+1}=y_n-\frac{2\{g(y_n)-a\}g'(y_n)}{2\{g'(y_n)\}^2-\{g(y_n)-a\}g''(y_n)}$$

さらに，分子・分母を $2g'(y_n)$ で割って

$$y_{n+1}=y_n-\frac{g(y_n)-a}{g'(y_n)-\dfrac{\{g(y_n)-a\}g''(y_n)}{2g'(y_n)}}$$

となる。これはハレー法と呼ばれている。

n 乗根の逆数

$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt[n]{x}}=x^{-\frac{1}{n}}$　（n は自然数）のとき

$y_0=x_0^{-\frac{1}{n}}$ であるから，$x_0=y_0^{-n}$

$$f(a)=(x_0+h)^{-\frac{1}{n}}=x_0{}^{-\frac{1}{n}}\left(1+\frac{h}{x_0}\right)^{-\frac{1}{n}}=y_0\left(1+\frac{h}{y_0{}^{-n}}\right)^{-\frac{1}{n}}=y_0\left(1+h\cdot y_0{}^n\right)^{-\frac{1}{n}}$$

初期値は$x_0>a$となるように取るので，$h<0$であるから，$h\cdot y_0{}^n=-k$とおくと

$$f(a)=y_0(1-k)^{-\frac{1}{n}}$$

ただし，$k=(x_0-a)\cdot y_0{}^n=(y_0{}^{-n}-a)\cdot y_0{}^n=1-a\cdot y_0{}^n$

すなわち

$$\frac{1}{\sqrt[n]{a}}=\frac{y_0}{\sqrt[n]{1-k}}\quad \text{ただし}\quad k=1-a\cdot y_0{}^n$$

右辺をテーラー展開すれば，高次収束のニュートン法が得られる。

例　$f(x)=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$のとき

$$\frac{1}{\sqrt{a}}=\frac{y_0}{\sqrt{1-k}}\quad \text{ただし}\quad k=1-a\cdot y_0{}^2$$

右辺をテーラー展開して

$$\frac{1}{\sqrt{a}}=y_0\left(1+\frac{1}{2}k+\frac{1}{2!}\cdot\frac{3}{2^2}k^2+\frac{1}{3!}\cdot\frac{3\cdot 5}{2^3}k^3+\frac{1}{4!}\cdot\frac{3\cdot 5\cdot 7}{2^4}k^4+\frac{1}{5!}\cdot\frac{3\cdot 5\cdot 7\cdot 9}{2^5}k^5+\cdots\right)$$

$$=y_0\left(1+\frac{1}{2}k+\frac{3}{8}k^2+\frac{5}{16}k^3+\frac{35}{128}k^4+\frac{63}{256}k^5+\cdots\right)$$

註　$\sqrt{a}=a\cdot\dfrac{1}{\sqrt{a}}$として$a$の平方根が求められる。

例　$f(x)=\dfrac{1}{x}$のとき

$$\frac{1}{a}=\frac{y_0}{1-k}\quad \text{ただし}\quad k=1-a\cdot y_0$$

右辺をテーラー展開をして

$$\frac{1}{a}=y_0\left(1+k+k^2+k^3+k^4+\cdots\right)$$

さらに変形すると

$$\frac{1}{a}=y_0\left\{(1+k)+(1+k)k^2+(1+k)k^4+\cdots\right\}$$

$$=y_0(1+k)(1+k^2+k^4+k^6+\cdots)$$

$$=y_0(1+k)(1+k^2)(1+k^4)(1+k^8)\cdots\cdot$$

例　$\sqrt[3]{a}$ を求めよう。

まず $\dfrac{1}{\sqrt[3]{a^2}}$ を求め，$\sqrt[3]{a} = a \cdot \dfrac{1}{\sqrt[3]{a^2}}$ より $\sqrt[3]{a}$ を求める。

そのためには，$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$ として，$f(a^2) = \dfrac{1}{\sqrt[3]{a^2}}$ を求めればよい。

$$\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}} = \frac{y_0}{\sqrt[3]{1-k}}$$ 　ただし $k = 1 - a^2 \cdot {y_0}^3$，$y_0$ は $\dfrac{1}{\sqrt[3]{a^2}}$ の粗い近似値

右辺をテーラー展開して

$$\frac{1}{\sqrt[3]{a^2}} = y_0\left(1 + \frac{1}{3}k + \frac{1}{2!}\cdot\frac{4}{3^2}k^2 + \frac{1}{3!}\cdot\frac{4\cdot7}{3^3}k^3 + \frac{1}{4!}\cdot\frac{4\cdot7\cdot10}{3^4}k^4 + \frac{1}{5!}\cdot\frac{4\cdot7\cdot10\cdot13}{3^5}k^5 + \cdots\right)$$

$$= y_0\left(1 + \frac{1}{3}k + \frac{2}{9}k^2 + \frac{14}{81}k^3 + \frac{35}{243}k^4 + \frac{91}{729}k^5 + \cdots\right)$$

註 1　除法を用いないので，下記の $\sqrt[n]{x}$ のニュートン法より高速である。

註 2　2 次収束のニュートン法を用いるとき $\dfrac{1}{\sqrt[3]{a^2}} \approx y_0 + \dfrac{y_0 - \left(a{y_0}^2\right)^2}{3}$ と変形すれば，乗算は 3 回となり，高次収束のニュートン法より高速である。

n 乗根

$f(x) = \sqrt[n]{x} = x^{\frac{1}{n}}$ 　（n は自然数）のとき

$y_0 = {x_0}^{\frac{1}{n}}$ であるから，$x_0 = {y_0}^n$

$$f(a) = (x_0 + h)^{\frac{1}{n}} = {x_0}^{\frac{1}{n}}\left(1 + \frac{h}{x_0}\right)^{\frac{1}{n}} = y_0\left(1 + \frac{h}{{y_0}^n}\right)^{\frac{1}{n}}$$

初期値は $x_0 > a$ となるように取るので，$h < 0$ であるから，$\dfrac{h}{{y_0}^n} = -k$ とおくと

$$f(a) = y_0(1-k)^{\frac{1}{n}}$$

ただし，$k = \dfrac{x_0 - a}{{y_0}^n} = \dfrac{{y_0}^n - a}{{y_0}^n} = 1 - \dfrac{a}{{y_0}^n}$

すなわち

$$\sqrt[n]{a} = y_0\sqrt[n]{1-k}$$ 　ただし $k = 1 - \dfrac{a}{{y_0}^n}$

註　除法が入るため，速度的に不利である。

例　$f(x)=\sqrt{x}$ のとき

$$\sqrt{a}=y_0\sqrt{1-k} \quad \text{ただし} \quad k=1-\frac{a}{{y_0}^2}$$

右辺をテーラー展開して

$$\sqrt{a}=y_0\left(1-\frac{1}{2}k-\frac{1}{2!}\cdot\frac{1}{2^2}k^2-\frac{1}{3!}\cdot\frac{3}{2^3}k^3-\frac{1}{4!}\cdot\frac{3\cdot 5}{2^4}k^4-\frac{1}{5!}\cdot\frac{3\cdot 5\cdot 7}{2^5}k^5-\cdots\right)$$

$$=y_0\left(1-\frac{1}{2}k-\frac{1}{8}k^2-\frac{1}{16}k^3-\frac{5}{128}k^4-\frac{7}{256}k^5-\cdots\right)$$

ニュートン法の変形

テーラー展開

$$f(a+h)=f(a)+f'(a)h+\frac{1}{2!}f''(a)h^2+\frac{1}{3!}f'''(a)h^3+\cdots\cdots$$

より

$$f(a)=f(a+h)-\left\{f'(a)h+\frac{1}{2!}f''(a)h^2+\frac{1}{3!}f'''(a)h^3+\cdots\cdots\right\}$$

ここで，$f(a+h)=y$ とおくと，$h=f^{-1}(y)-a$

$$f(a)=y-\left\{f'(a)h+\frac{1}{2!}f''(a)h^2+\frac{1}{3!}f'''(a)h^3+\cdots\cdots\right\}$$

これを用いると，例えば，$f(a)$ に 4 次収束する y_n, y_{n+1} についての漸化式は，次のようになる。

$$y_{n+1}=y_n-\left\{f'(a)h+\frac{1}{2!}f''(a)h^2+\frac{1}{3!}f'''(a)h^3\right\} \qquad \text{ただし} \quad h=f^{-1}(y_n)-a$$

円周率への応用

$f(x)=\arccos x$　のとき　$f(0)=\arccos 0=\dfrac{\pi}{2}$

$$f'(x)=-\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}=-\left(1+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2!}\cdot\frac{3}{2^2}x^4+\frac{1}{3!}\cdot\frac{3\cdot 5}{2^3}x^6+\frac{1}{4!}\cdot\frac{3\cdot 5\cdot 7}{2^4}x^8+\cdots\right)$$

積分して

$$f(x)=\frac{\pi}{2}-\left(x+\frac{1}{2\cdot 3}x^3+\frac{1}{2!}\cdot\frac{3}{2^2\cdot 5}x^5+\frac{1}{3!}\cdot\frac{3\cdot 5}{2^3\cdot 7}x^7+\frac{1}{4!}\cdot\frac{3\cdot 5\cdot 7}{2^4\cdot 9}x^9+\cdots\right)$$

よって

$$\frac{\pi}{2}=f(x)+\left(x+\frac{1}{2\cdot 3}x^3+\frac{1}{2!}\cdot\frac{3}{2^2\cdot 5}x^5+\frac{1}{3!}\cdot\frac{3\cdot 5}{2^3\cdot 7}x^7+\frac{1}{4!}\cdot\frac{3\cdot 5\cdot 7}{2^4\cdot 9}x^9+\cdots\right)$$

$f(x)=y$ とおくと，$x=\cos y$　であるから

$$\frac{\pi}{2}=y+\left(\cos y+\frac{1}{2\cdot 3}\cos^3 y+\frac{1}{2!}\cdot\frac{3}{2^2\cdot 5}\cos^5 y+\frac{1}{3!}\cdot\frac{3\cdot 5}{2^3\cdot 7}\cos^7 y+\frac{1}{4!}\cdot\frac{3\cdot 5\cdot 7}{2^4\cdot 9}\cos^9 y+\cdots\right)$$

例えば $\dfrac{\pi}{2}$ を求める 9 次収束の漸化式は次の様になる。

$$y_{n+1} = y_n + \left(\cos y_n + \frac{1}{6}\cos^3 y_n + \frac{3}{40}\cos^5 y_n + \frac{5}{112}\cos^7 y_n \right)$$

変形して

$$y_{n+1} = y_n + \left(\left(\left(\frac{5}{112}\cos^2 y_n + \frac{3}{40} \right)\cos^2 y_n + \frac{1}{6} \right)\cos^2 y_n + 1 \right)\cos y_n$$