ペル方程式

D を平方数でない自然数として,整数 x と y に関する不定方程式

$$x^2-Dy^2=1 \quad \cdots ①$$

をペル方程式という。

$x=\pm 1, y=0$ は自明な解である。また,(x,y) が解ならば $(x,-y),(-x,y),(-x,-y)$ も解であるから,x,y がともに自然数である解だけを考えればよい。

補題 1 (a,b) および (c,d) を①の整数解とするとき,$\left(a+b\sqrt{D}\right)\left(c+d\sqrt{D}\right)=A+B\sqrt{D}$ で求まる (A,B) も①の整数解である。特に a,b,c,d が自然数のとき,A,B も自然数である。

証明 $\left(a+b\sqrt{D}\right)\left(c+d\sqrt{D}\right)=(ac+bdD)+(ad+bc)\sqrt{D}$

$$(ac+bdD)^2-D(ad+bc)^2=(ac)^2+(bdD)^2-D(ad)^2-D(bc)^2=(a^2-Db^2)(c^2-Dd^2)=1$$

a,b,c,d が自然数のとき,$ac+bdD, ad+bc$ も自然数である。

□

系 (a,b) を①の自然数解とすると,n を自然数として $\left(a+b\sqrt{D}\right)^n=A+B\sqrt{D}$ で求まる (A,B) も①の自然数解である。

補題 2 (a,b) および (c,d) を①の整数解とするとき,$\frac{a+b\sqrt{D}}{c+d\sqrt{D}}=A+B\sqrt{D}$ で求まる (A,B) も①の整数解である。

証明 $\frac{a+b\sqrt{D}}{c+d\sqrt{D}}=\frac{(a+b\sqrt{D})(c-d\sqrt{D})}{(c+d\sqrt{D})(c-d\sqrt{D})}=\frac{(ac-bdD)+(-ad+bc)\sqrt{D}}{c^2-Dd^2}=(ac-bdD)+(-ad+bc)\sqrt{D}$

$$(ac-bdD)^2-D(-ad+bc)^2=(ac)^2+(bdD)^2-D(ad)^2-D(bc)^2=(a^2-Db^2)(c^2-Dd^2)=1$$

□

補題 3 (a,b) を①の整数解とするとき,$a>0, b>0 \Leftrightarrow a+b\sqrt{D}>1$

$\Rightarrow$ $\sqrt{D}>1$ より明らか

$a+b\sqrt{D}>1$ と仮定する。

$a^2-Db^2=1$ より $\left(a+b\sqrt{D}\right)\left(a-b\sqrt{D}\right)=1$

これと $a+b\sqrt{D}>1$ より,$0<a-b\sqrt{D}<1$

よって,$2a=\left(a+b\sqrt{D}\right)+\left(a-b\sqrt{D}\right)>1+0>0$

また,$-1<b\sqrt{D}-a<0$ であるから $2b\sqrt{D}=\left(a+b\sqrt{D}\right)+\left(b\sqrt{D}-a\right)>1+(-1)=0$

したがって,$a>0, b>0$

□

定理 1 ①の自然数解の中で $x+y\sqrt{D}$ を最小にするような解を (x_0,y_0) とおく。このとき,n を自然数として $(x_0+y_0\sqrt{D})^n=A+B\sqrt{D}$ で求まる (A,B) が①の自然数解のすべてである。

証明 補題 3 により,(x_0,y_0) は $x+y\sqrt{D}>1$ を満たす①の解のうちで $x+y\sqrt{D}$ を最小にするものである。

$x_0+y_0\sqrt{D}>1$ であるから,①の任意の自然数解 (s,t) に対し,

$$(x_0+y_0\sqrt{D})^n \leqq s+t\sqrt{D}<(x_0+y_0\sqrt{D})^{n+1}$$

となる自然数 n が存在する。3 辺を$(x_0+y_0\sqrt{D})^n$で割って

$$1 \leqq \frac{s+t\sqrt{D}}{(x_0+y_0\sqrt{D})^n} < x_0+y_0\sqrt{D}$$

$\frac{s+t\sqrt{D}}{\left(x_0+y_0\sqrt{D}\right)^n} > 1$のとき,補題 1,2,3 により,$\frac{s+t\sqrt{D}}{(x_0+y_0\sqrt{D})^n} = A+B\sqrt{D}$で求まる$(A,B)$も①の自然数解である。

これは $x_0+y_0\sqrt{D}$が最小であることに反するので　$\frac{s+t\sqrt{D}}{\left(x_0+y_0\sqrt{D}\right)^n}=1$

ゆえに

$$s+t\sqrt{D}=\left(x_0+y_0\sqrt{D}\right)^n$$

□

定理 2 ペル方程式には自明でない解が存在する。

証明 ディリクレのディオファントス近似定理により,$\left|x-y\sqrt{D}\right|<\frac{1}{y}$を満たす自然数 x,y の組は無数に存在する。このとき$-\frac{1}{y}<x-y\sqrt{D}<\frac{1}{y}$ であるから, $x-y\sqrt{D}<\frac{1}{y}$の両辺に$2y\sqrt{D}$を足して,

$$x+y\sqrt{D}<\frac{1}{y}+2y\sqrt{D}$$

この不等式と,不等式$\left|x-y\sqrt{D}\right|<\frac{1}{y}$ の両辺をそれぞれ掛けると

$$\left(x+y\sqrt{D}\right)\cdot\left|x-y\sqrt{D}\right|<\left(\frac{1}{y}+2y\sqrt{D}\right)\cdot\frac{1}{y}$$

よって　$|x^2-Dy^2|<\frac{1}{y^2}+2\sqrt{D}$

y は自然数より$\frac{1}{y^2}\leqq 1$であるから

$$|x^2-Dy^2|<1+2\sqrt{D}\quad すなわち\quad -\left(1+2\sqrt{D}\right)<x^2-Dy^2<1+2\sqrt{D}$$

この不等式を満たす自然数 x,y は無数に存在するから,ある 0 でない整数 m に対して

$$x^2-Dy^2=m \quad \cdots②$$

を満たす自然数 x,y は無数に存在する。

よって,②を満たす x,y を, $|m|$で割った余りでm^2個の組に分類すると,同じ組に属するものがある。

(s,t)と(u,v)が同じ組に属するとすると,整数 h,k を用いて

$$u=s+km, v=t+hm$$

と表される。したがって

$$sv-tu=s(t+hm)-t(s+km)=(sh-tk)m$$

よって,$Y=sh-tk$とおくと

$$sv-tu=Ym$$

また,(s,t)と(u,v)は②を満たすので

$$m^2=(s^2-Dt^2)(u^2-Dv^2)=(su-Dtv)^2-D(sv-tu)^2=(su-Dtv)^2-DY^2m^2$$

よって,$(su-Dtv)^2$はm^2の倍数であるから,$su-Dtv$は m の倍数である。
したがって,Xを整数として,$su-Dtv=mX$とおくと,

$$(mX)^2-DY^2m^2=m^2$$

が得られる。両辺をm^2で割ると

$$X^2-DY^2=1$$

ゆえに,(X,Y)は①の解である。

□