$$16\arctan\left(\frac{1}{21}\right)+3\arctan\left(\frac{1}{239}\right)+4\arctan\left(\frac{1}{347}\right)-4\arctan\left(\frac{1}{361577}\right)=\frac{\pi}{4} \quad \cdots①$$

証明

$$\arctan(a)+\arctan(b)=\arctan\left(\frac{a+b}{1-ab}\right)$$

$$\arctan(a)-\arctan(b)=\arctan\left(\frac{a-b}{1+ab}\right)$$

を用いて変形する。

$$\arctan\left(\frac{1}{347}\right)-\arctan\left(\frac{1}{361577}\right)=\arctan\left(\frac{3}{1042}\right)$$

より，

$$\text{左辺}=16\arctan\left(\frac{1}{21}\right)+3\arctan\left(\frac{1}{239}\right)+4\arctan\left(\frac{3}{1042}\right)$$

さらに

$$\arctan\left(\frac{3}{1042}\right)+\arctan\left(\frac{1}{21}\right)=\arctan\left(\frac{5}{99}\right)$$

$$\arctan\left(\frac{5}{99}\right)+\arctan\left(\frac{1}{21}\right)=\arctan\left(\frac{6}{61}\right)$$

$$\arctan\left(\frac{6}{61}\right)+\arctan\left(\frac{1}{21}\right)=\arctan\left(\frac{11}{75}\right)$$

$$\arctan\left(\frac{11}{75}\right)+\arctan\left(\frac{1}{21}\right)=\arctan\left(\frac{9}{46}\right)$$

より

$$\text{左辺}=3\arctan\left(\frac{1}{239}\right)+4\arctan\left(\frac{9}{46}\right)$$

さらに

$$\arctan\left(\frac{1}{239}\right)+\arctan\left(\frac{9}{46}\right)=\arctan\left(\frac{1}{5}\right)$$

より

$$\text{左辺}=4\arctan\left(\frac{1}{5}\right)-\arctan\left(\frac{1}{239}\right)$$

よって，与式はマチンの公式により $\pi/4$ である。

このマチンの公式を示す。

$$-\arctan\left(\frac{1}{239}\right)+\arctan\left(\frac{1}{5}\right)=\arctan\left(\frac{9}{46}\right)$$

$$\arctan\left(\frac{9}{46}\right)+\arctan\left(\frac{1}{5}\right)=\arctan\left(\frac{7}{17}\right)$$

$$\arctan\left(\frac{7}{17}\right)+\arctan\left(\frac{1}{5}\right)=\arctan\left(\frac{2}{3}\right)$$

$$\arctan\left(\frac{2}{3}\right)+\arctan\left(\frac{1}{5}\right)=\arctan(1)$$

より

$$16\arctan\left(\frac{1}{21}\right)+3\arctan\left(\frac{1}{239}\right)+4\arctan\left(\frac{1}{347}\right)-4\arctan\left(\frac{1}{361577}\right)=\frac{\pi}{4}$$

証明終

等式

$$16\arctan\left(\frac{1}{21}\right)+3\arctan\left(\frac{1}{239}\right)+4\arctan\left(\frac{3}{1042}\right)=\frac{\pi}{4} \quad \cdots ②$$

において，$\arctan\left(\frac{3}{1042}\right)$ を変形すれば，次の公式が得られる。ただし，それらは既知のものである。

$$16\arctan\left(\frac{1}{21}\right)+3\arctan\left(\frac{1}{239}\right)+4\arctan\left(\frac{1}{343}\right)-4\arctan\left(\frac{1}{27493}\right)=\frac{\pi}{4}$$

$$16\arctan\left(\frac{1}{21}\right)+3\arctan\left(\frac{1}{239}\right)+4\arctan\left(\frac{1}{353}\right)+4\arctan\left(\frac{1}{21637}\right)=\frac{\pi}{4}$$

$$16\arctan\left(\frac{1}{21}\right)+3\arctan\left(\frac{1}{239}\right)+4\arctan\left(\frac{1}{421}\right)+4\arctan\left(\frac{1}{1985}\right)=\frac{\pi}{4} \quad \cdots ③$$

$$16\arctan\left(\frac{1}{21}\right)+3\arctan\left(\frac{1}{239}\right)+4\arctan\left(\frac{1}{251}\right)-4\arctan\left(\frac{1}{905}\right)=\frac{\pi}{4}$$

③は高野喜久雄氏が発見したものである。これらは，②から次のように導かれる。

$$\arctan\left(\frac{m}{n}\right)=\arctan\left(\frac{1}{a}\right)+\arctan\left(\frac{1}{b}\right) \Leftrightarrow (n-ma)(n-mb)=m^2+n^2 \quad \cdots ④$$

であるから

$\arctan\left(\frac{3}{1042}\right)=\arctan\left(\frac{1}{a}\right)+\arctan\left(\frac{1}{b}\right)$ とおくと

$$(1042-3a)(1042-3b)=3^2+1042^2$$

$$(1042-3a)(1042-3b)=1085773$$

$$(1042-3a)(1042-3b)=13\cdot(-17)^4$$

ここで，

$$1042\equiv 1,\ 13\equiv 1,\ -17\equiv 1 \pmod 3$$

であるから，方程式が a と b について対称であることに注意して異なる解を求めると

$$\begin{aligned}(1042-3a, 1042-3b) &= (1, 13\cdot(-17)^4)\\ &, (13, (-17)^4)\\ &, (-17, 13\cdot(-17)^3)\\ &, (13\cdot(-17), (-17)^3)\\ &, ((-17)^2, 13\cdot(-17)^2)\end{aligned}$$

よって

$$(a,b)=(347,-361577),\ (343,-27493),\ (353,21637),\ (421,1985),\ (251,-905)$$

次に，柴田昭彦氏の公式

$$12\arctan\left(\frac{1}{15}\right)-\arctan\left(\frac{1}{239}\right)-4\arctan\left(\frac{1}{580}\right)-4\arctan\left(\frac{1}{1710}\right)=\frac{\pi}{4}$$

から

$$12\arctan\left(\frac{1}{15}\right)-\arctan\left(\frac{1}{239}\right)-4\arctan\left(\frac{1}{433}\right)+4\arctan\left(\frac{1}{1875333}\right)=\frac{\pi}{4}$$

を導く。

$$\arctan\left(\frac{1}{580}\right)+\arctan\left(\frac{1}{1710}\right)=\arctan\left(\frac{10}{4331}\right)$$

であるから

$$\arctan\left(\frac{10}{4331}\right)=\arctan\left(\frac{1}{a}\right)+\arctan\left(\frac{1}{b}\right)$$

とおくと

$$(4331-10a)(4331-10b)=4331^2+10^2$$

$$(4331-10a)(4331-10b)=18757661$$

$$(4331-10a)(4331-10b)=13\cdot 113^3$$

ここで，

$$4331\equiv 1,\quad 18757661\equiv 1,\quad -13\cdot 113\equiv 1,\quad -113^2\equiv 1 \pmod{10}$$

であるから，方程式が a と b について対称であることに注意して異なる解を求めると

$$(4331-10a)(4331-10b)=(1,18757661),\quad (-13\cdot 113,-113^2)$$

よって

$$(a,b)=(433,-1875333),\quad (580,1710)$$