$\dfrac{\pi}{4}$ の arctan 公式の性質

John Machin の公式　　$\dfrac{\pi}{4}=4\arctan\dfrac{1}{5}-\arctan\dfrac{1}{239}$

Karl Friedrich Gauss の公式　$\dfrac{\pi}{4}=12\arctan\dfrac{1}{18}+8\arctan\dfrac{1}{57}-5\arctan\dfrac{1}{239}$

には共に　$\arctan\dfrac{1}{239}$　が現れる。他にも，2002 年に金田康正と後保範などの方々が円周率 1.2 兆桁の世界記録を達 成するのに用いた，高野喜久雄の公式，F.C.M.Størmer の公式など　$\arctan\dfrac{1}{239}$　が現れる公式が多数存在する。以下で，239 という数は「特別な数」なのだろうか？という疑問を解消する。さらに，「特別な数」を用いて，円周率の新公式を見つける。

n を絶対値が 1 より大きい整数として，x についての方程式

$$\arctan 1=\arctan\frac{1}{n}+2\arctan x \qquad \cdots①$$

を考える。①より

$$\arctan x=\frac{1}{2}\left(\arctan 1-\arctan\frac{1}{n}\right)$$

ここで，　$\left|\dfrac{1}{n}\right|<1$　であるから　$0<\dfrac{1}{2}\left(\arctan 1-\arctan\dfrac{1}{n}\right)<\arctan 1$

よって，①はただ一つの実数解を　$0<x<1$　の範囲に持つ。

次に，①が有理数解を持つ n の条件とその解を求める。

定理 1　①が有理数解を持つのは，n が整数　n，m　についての不定方程式

$$n^2-2m^2=-1$$

の解のときである。このとき①の有理数解を p とすると，

$$p=\frac{n-m}{m+1}\quad\left(=\frac{m-1}{n+m}\right)\qquad \text{ただし，} m \text{ は } n \text{ と同符号}$$

となる。

証明　有理数 p が①の解であるとする。

$$\arctan 1-2\arctan p=\arctan 1-\arctan\frac{2p}{1-p^2}$$

$$=\arctan\frac{1-\dfrac{2p}{1-p^2}}{1+\dfrac{2p}{1-p^2}}=\arctan\frac{1-p^2-2p}{1-p^2+2p}$$

であるから　$\arctan\dfrac{1}{n}=\arctan 1-2\arctan p$　より

$$n=\frac{1-p^2+2p}{1-p^2-2p}\qquad\cdots②$$

これより

$$n^2+1=\frac{(1-p^2+2p)^2}{(1-p^2-2p)^2}+1=\frac{2\{(1-p^2)^2+4p^2\}}{(1-p^2-2p)^2}=\frac{2(1+p^2)^2}{(1-p^2-2p)^2}$$

すなわち

$$n^2+1=2\left(\frac{1+p^2}{1-p^2-2p}\right)^2$$

$m=\dfrac{1+p^2}{1-p^2-2p}$　と置くと，m は有理数であり

$$n^2+1=2m^2$$

ここで，m が整数でないと仮定すると，　$2m^2$　は整数でないから，これは　n^2+1　が整数であることに反する。よって，m は整数である。移項して

$$n^2-2m^2=-1\qquad\cdots③$$

また，②より

$$n(1-p^2-2p)=1-p^2+2p$$

$$(n-1)p^2+2(n+1)p-n+1=0$$

$$p=\frac{-(n+1)\pm\sqrt{2n^2+2}}{n-1}=\frac{-(n+1)\pm\sqrt{4m^2}}{n-1}=\frac{-(n+1)\pm 2m}{n-1}$$

よって，③を満たす整数　m，n　に対して，　$p=\dfrac{2m-n-1}{n-1}$　$\cdots$④としてよい。

次に，　m，n　の符号について考える。

$(2m)^2-(n+1)^2=2(n^2+1)-(n+1)^2=n^2-2n+1=(n-1)^2>0$　より　$|2m|>|n+1|$

これと　$0<p<1$　より，④において m は n と同符号である。

④を簡潔にする。

$$(2m-n-1)(m+1)-(n-m)(n-1)$$

$$=(2m^2-mn+m-n-1)-(n^2-mn+m-n)$$

$$=2m^2-n^2-1=0$$

ゆえに

$$p=\frac{2m-n-1}{n-1}=\frac{n-m}{m+1}\quad\left(=\frac{m-1}{n+m}\right)$$ ただし，m は n と同符号

逆に，　$p=\dfrac{n-m}{m+1}$　（ただし，　$n^2-2m^2=-1$ ，m は n と同符号の整数）は①の有理数解である。

証明終

次に，　$n^2-2m^2=-1$　を満たす整数　n，m　を求める。

これは，広義のペル方程式と呼ばれていて，大学入試にも出題されている。次の問題は「東京工業大学 1985 年 第 1 問」である。ただし，普通の高校生が解ける問題とは思えない。

なお，この問題で集合の元とは集合の要素のことである。

問題　2 つの条件

(i)　$a^2-2b^2=1$　または　$a^2-2b^2=-1$

(ii)　$a+b\sqrt{2}>0$

を満たす任意の整数　a，b　から得られる実数　$g=a+b\sqrt{2}$　全体の集合を G とする。1 より大きい G の元のうち最小のものを u とする。

(1)　u を求めよ。

(2)　整数 n と G の元 g に対し，　gu^n　は G の元であることを示せ。

(3)　G の任意の元 g は適当な整数 m によって，　$g=u^m$　と書かれることを示せ。

解 (1)（i）が成り立つとき，　$a+b\sqrt{2}>1 \Leftrightarrow a\geqq 1,\ b\geqq 1$　であることを示す。

$\Leftarrow$　が成り立つことは明らかであるから　$\Rightarrow$　が成り立つことを示す。

$a^2-2b^2=1$　が成り立つとき

$(a+b\sqrt{2})(a-b\sqrt{2})=1$　と　$a+b\sqrt{2}>1$　より　$0<a-b\sqrt{2}<1$

$a+b\sqrt{2}>1$　と　$a-b\sqrt{2}>0$　の両辺を足すと，　$2a>1$　となるから　$a>0$

$a+b\sqrt{2}>1$　と　$-(a-b\sqrt{2})>-1$　の両辺を足すと，　$2\sqrt{2}b>0$　となるから　$b>0$

$a^2-2b^2=-1$　が成り立つとき

$(a+b\sqrt{2})(a-b\sqrt{2})=-1$　と　$a+b\sqrt{2}>1$　より　$-1<a-b\sqrt{2}<0$

$a+b\sqrt{2}>1$　と　$a-b\sqrt{2}>-1$　の両辺を足すと，　$2a>0$　となるから　$a>0$

$a+b\sqrt{2}>1$　と　$-(a-b\sqrt{2})>0$　の両辺を足すと，　$2\sqrt{2}b>1$　となるから　$b>0$

いずれの場合も　$a>0$，$b>0$　であり，　a，b　は整数であるから，　$a \geqq 1$，$b \geqq 1$

ここで，　$a=1$，$b=1$　のとき　$a^2-2b^2=-1$　が成り立つから，　$u=1+\sqrt{2}$

(2)　$g \in G$，$h \in G \Rightarrow gh \in G$　を示す。

a，b，c，d　を整数として　$g=a+b\sqrt{2}$，$h=c+d\sqrt{2}$　表す。このとき

$$gh=(a+b\sqrt{2})(c+d\sqrt{2})=ac+2bd+(ad+bc)\sqrt{2}$$

ここで

$$(ac+2bd)^2-2(ad+bc)^2=a^2c^2+4b^2d^2-2a^2d^2-2b^2c^2$$
$$=(a^2-2b^2)(c^2-2d^2)=(\pm 1)\times(\pm 1)=\pm 1$$

よって，　$gh \in G$

nが正の整数のとき，　$g \in G$，$h \in G \Rightarrow gh \in G$　を繰り返し用いれば，　$gu^n \in G$

$n=0$のとき，　$gu^n=g \in G$

nが負の整数のとき，　$0<u^{-1}=\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}=-1+\sqrt{2}$，$(-1)^2-2\cdot 1^2=-1$　であるから　$u^{-1} \in G$

よって，　$g \in G$，$h \in G \Rightarrow gh \in G$　を繰り返し用いれば，　$gu^n=g(u^{-1})^{(-n)} \in G$

ゆえに，整数nとGの元gに対し，　gu^n　はGの元である。

(3)　$u>1$　であるから，Gの元である任意の　$g>0$　に対して　$u^m \leqq g < u^{m+1}$　となる整数mが存在する。この不等式の各辺を　u^m　で割ると

$$1 \leqq g u^{-m} < u$$

ここで，(2)より，　$g u^{-m} \in G$　であり，1より大きいGの元のうち最小のものがuであるから

$$g u^{-m}=1$$

よって，　$g=u^m$

定理2　自然数　n，m　についての不定方程式　$n^2-2m^2=-1$　の解　n_i，m_i　$(i=1,2,3,\cdots)$　は，次の式により求まる。

$$n_1=1,\ n_2=7,\ m_1=1,\ m_2=5$$
$$n_{i+2}=6n_{i+1}-n_i,\ m_{i+2}=6m_{i+1}-m_i\quad (i=1,2,3,\cdots)$$

証明　kを整数として　$(1+\sqrt{2})^k=n_k+m_k\sqrt{2}$　（n_k，m_kは整数）　とおく。

このとき，上の解答から　$n_k \geqq 1$，$m_k \geqq 1$，$n_k^2-2m_k^2=-1$　となるのはkが正の奇数のときである。

よって，i を自然数として，　$(1+\sqrt{2})^{2i-1}=n_i+m_i\sqrt{2}$　(a_i，b_i は整数)　とおくと，

$n_i \geqq 1$，$m_i \geqq 1$，$n_i^2-2m_i^2=-1$　であり，これが求めるものである。

ここで，　$(1-\sqrt{2})^{2i-1}=n_i-m_i\sqrt{2}$　が成り立つから，

$$n_i=\frac{1}{2}\{(1+\sqrt{2})^{2i-1}+(1-\sqrt{2})^{2i-1}\},\ m_i=\frac{1}{2\sqrt{2}}\{(1+\sqrt{2})^{2i-1}-(1-\sqrt{2})^{2i-1}\}$$

これより，　$n_1=1$，$n_2=7$，$m_1=1$，$m_2=5$　である。

また，　$(1+\sqrt{2})^2+(1-\sqrt{2})^2=6$，$(1+\sqrt{2})^2(1-\sqrt{2})^2=1$　より　$(1+\sqrt{2})^2$，$(1-\sqrt{2})^2$　は2次方程式　$x^2-6x+1=0$　すなわち　$x^2=6x-1$　の2つの解である。よって，　n_i，m_i　は次の漸化式により求まる。

$$n_{i+2}=6n_{i+1}-n_i,\ m_{i+2}=6m_{i+1}-m_i \quad (i=1,2,3,\cdots)$$

証明終

註　n, m の値は，隣接3項間漸化式の代わりに，以下のような連立漸化式でも求められる。

$(1+\sqrt{2})^{2i-1}=n_i+m_i\sqrt{2}$　より　$(1+\sqrt{2})^{2(i+1)-1}=n_{i+1}+m_{i+1}\sqrt{2}$

ここで　
$$\begin{aligned}(1+\sqrt{2})^{2(i+1)-1}&=(1+\sqrt{2})^{2i-1}(1+\sqrt{2})^2\\&=(n_i+m_i\sqrt{2})(3+2\sqrt{2})\\&=(3n_i+4m_i)+(2n_i+3m_i)\sqrt{2}\end{aligned}$$

よって　$n_{i+1}=3n_i+4m_i$，$m_{i+1}=2n_i+3m_i$

このとき，n, p の値を求める十進BASICのプログラムは次のようになる。

```
OPTION ARITHMETIC RATIONAL
LET n=1
LET m=1
FOR i=1 TO 10
  LET n1=3*n+4*m
  LET m=2*n+3*m
  LET n=n1
  PRINT n,(n-m)/(m+1)
  PRINT -n,(-n+m)/(-m+1)
NEXT i
END
```

7	1/3
-7	1/2
41	2/5
-41	3/7
239	7/17
-239	5/12
1393	12/29
-1393	17/41
8119	41/99
-8119	29/70
47321	70/169
-47321	99/239
275807	239/577
-275807	169/408
1607521	408/985
-1607521	577/1393
9369319	1393/3363
-9369319	985/2378
54608393	2378/5741
-54608393	3363/8119

定理 3 公式 $\dfrac{\pi}{4}=\sum_{i=1}^{k} a_i \arctan\dfrac{1}{b_i}$ （a_i は整数，b_i は自然数） には次のような性質がある。

ただし，次のⅡ，Ⅲにおいて，n は定理 2 により求まる自然数 7，41，239，1393，…とする。

Ⅰ　係数 a_i の少なくとも一つは奇数である。

Ⅱ　係数が奇数である項がただ一つである公式では，係数が奇数 a_j である項は $a_j \arctan\dfrac{1}{n}$ となる。

Ⅲ　$\arctan\dfrac{1}{n}$ が現れない公式には，係数が奇数の項が二つ以上ある。

証明　Ⅰ　すべての係数が偶数であると仮定すると，公式を加法定理により変形して

$$\frac{\pi}{4}=2\arctan p \quad (p \text{ は有理数})$$

と表される。よって

$$\frac{\pi}{8}=\arctan p$$

$$p=\tan\frac{\pi}{8}=\sqrt{2}-1$$

$$p+1=\sqrt{2}$$

$p+1$ は有理数，$\sqrt{2}$ は無理数で矛盾するから，係数 a_i の少なくとも一つは奇数である。

II　$a_j\arctan\dfrac{1}{b_j}$ の係数 a_j のみが奇数であるとすると，公式を加法定理により変形して

$$\frac{\pi}{4}=\arctan\frac{1}{b_j}+2\arctan p \quad (p\text{ は有理数})$$

と表される。よって，定理 1 により，$b_j=n$ である。

III　I，II より明らか。

証明終

例　F.C.M.Størmer の公式

$$\frac{\pi}{4}=44\arctan\frac{1}{57}+7\arctan\frac{1}{239}-12\arctan\frac{1}{682}+24\arctan\frac{1}{12943}$$

は，係数が奇数である項がただ一つあり，それは $7\arctan\dfrac{1}{239}$ である。

Jörg Arndt の公式

$$\frac{\pi}{4}=17\arctan\frac{1}{23}+8\arctan\frac{1}{182}+10\arctan\frac{1}{5118}+5\arctan\frac{1}{6072}$$

には，係数が奇数である項は $17\arctan\dfrac{1}{23}$，$5\arctan\dfrac{1}{6072}$ の 2 つある。

定理の応用

定理 2 により求まる自然数 n の値の集合を H とすると $n\in H \Rightarrow 4n^3+3n\in H$ である。

証明　$n\in H$ とすると，定理 1 により

$$\arctan 1=\arctan\frac{1}{n}+2\arctan p \quad (p\text{ は有理数})$$

と表される。ここで

$$2\arctan\frac{1}{2n}-\arctan\frac{1}{n}=\arctan\frac{4n}{4n^2-1}-\arctan\frac{1}{n}=\arctan\frac{1}{4n^3+3n}$$

より

$$\arctan\frac{1}{n}=2\arctan\frac{1}{2n}-\arctan\frac{1}{4n^3+3n}$$

であるから

$$\arctan 1 = 2\arctan\frac{1}{2n} - \arctan\frac{1}{4n^3+3n} + 2\arctan p$$

$$= \arctan\frac{1}{4n^3+3n} + 2\left(\arctan\frac{1}{2n} - \arctan\frac{1}{4n^3+3n} + \arctan p\right)$$

よって，次のように表される。

$$\arctan 1 = \arctan\frac{1}{4n^3+3n} + 2\arctan p' \quad (p' \text{ は有理数})$$

したがって，定理１により，　$4n^3+3n \in H$

証明終

別証　恒等式　$(ac+2bd)^2-2(ad+bc)^2=(a^2-2b^2)(c^2-2d^2)$　を用いる。

$n^2-2m^2=-1$　とする。このとき，

$$(n^2+2m^2)^2-2(2mn)^2=(-1)\times(-1)$$

さらに　$\{n(n^2+2m^2)+2m(2mn)\}^2-2\{n(2mn)+m(n^2+2m^2)\}^2=(-1)\times(-1)\times(-1)$

$n^2-2m^2=-1$　を用いて変形すると

$$(4n^3+3n)^2-2(8m^3-3m)^2=-1$$

よって，　$4n^3+3n \in H$

$\frac{\pi}{4}$　の arctan 新公式

定理 1，2 を用いて，次のように新たな　$\frac{\pi}{4}$　の arctan 公式を見つけることができる。

$$\frac{\pi}{4} = \arctan\frac{1}{275807} + 2\arctan\frac{239}{577}$$

$$= 22\arctan\frac{1}{28} + \arctan\frac{1}{275807} + 2\left(-11\arctan\frac{1}{28} + \arctan\frac{239}{577}\right)$$

$$= 22\arctan\frac{1}{28} + \arctan\frac{1}{275807} + 2\arctan\frac{1466625710157}{208642724182192949}$$

$$= 22\arctan\frac{1}{28} + \arctan\frac{1}{275807} + 2\Bigl(\arctan\frac{1}{142057} - \arctan\frac{1}{99368343}$$

$$- \arctan\frac{1}{54838715017299308} - \arctan\frac{1}{88942800178226109582168404411725}$$

$$+ \arctan\frac{1}{61775097240445660329693394511093237957733203657982660526882}\Bigr)$$