三角関数の高速計算法

三角関数

$\cos\theta$ をマクローリン展開すると

$$\cos\theta = 1 - \frac{\theta^2}{2!} + \frac{\theta^4}{4!} - \frac{\theta^6}{6!} + \frac{\theta^8}{8!} + \cdots$$

となる。この計算を高速化する方法を示す。

まず，m を正の 2 以上の整数として $\cos\frac{\theta}{2^m}$ を計算する。m が大きければマクローリン展開は収束が速い。そして，2 倍角の公式 $\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$ を m 回用いれば，$\cos\theta$ が得られる。

しかし，この方法では $\frac{\theta}{2^m}$ の値が小さいため，$\cos\frac{\theta}{2^m}$ の値が 1 に近くなりすぎて，桁落ちが起こる。

桁落ちを防ぐためは，$1-\cos\frac{\theta}{2^m}$ の値を計算し，その値から $1-\cos\theta$ の値を求めればよい。

さらに，乗算の回数を減らすために，$2(1-\cos\frac{\theta}{2^m})$ の値から $2(1-\cos\theta)$ の値を求めることにした。

公式 1

m を任意の自然数の定数として，

$$a_0 = 2(1-\cos\frac{\theta}{2^m})$$

$$= 2\{\frac{1}{2!}\cdot(\frac{\theta}{2^m})^2 - \frac{1}{4!}\cdot(\frac{\theta}{2^m})^4 + \frac{1}{6!}\cdot(\frac{\theta}{2^m})^6 - \frac{1}{8!}\cdot(\frac{\theta}{2^m})^8 + \cdots\}$$

とし，漸化式

$$a_{n+1} = a_n(4-a_n) \quad (\text{n=0，1，2，3，}\cdots\text{，m}-1)$$

により a_m を求めると

$$\cos\theta = 1 - \frac{1}{2}a_m$$

となる。

証明

2 倍角の公式　$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1$　より

$$\begin{aligned}1-\cos 2\alpha &= 2 - 2\cos^2\alpha \\ &= 2 - 2\{1-(1-\cos\alpha)\}^2 \\ &= 2 - 2\{1 - 2(1-\cos\alpha) + (1-\cos\alpha)^2\} \\ &= 4(1-\cos\alpha) - 2(1-\cos\alpha)^2 \\ &= 2(1-\cos\alpha)\{2-(1-\cos\alpha)\}\end{aligned}$$

よって

$$2(1-\cos 2\alpha) = 2(1-\cos\alpha)\{4 - 2(1-\cos\alpha)\}$$

したがって，m を自然数の定数として

$$a_0 = 2\{1 - \cos\frac{\theta}{2^m}\} \quad \cdots ①$$

とし，漸化式

$$a_{n+1} = a_n(4 - a_n) \quad (n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ m-1)$$

により a_m を求めれば

$$a_m = 2(1 - \cos\theta)$$

となるから

$$\cos\theta = 1 - \frac{1}{2}a_m$$

このとき，①をマクローリン展開すればよい。

証明終

$\sin\theta$ は，予め $\frac{\pi}{2}$ の値を計算しておき，公式 $\sin\theta = \cos(\theta - \frac{\pi}{2})$ または $\sin\theta = \cos(\frac{\pi}{2} - \theta)$ により求めるのがよい。

以下は，m＝40 としたときの，$\cos x$ を求める十進 BASIC のプログラムです。

```
EXTERNAL FUNCTION COS(x)
OPTION ARITHMETIC DECIMAL_HIGH
LET kurikaesi=40
LET x=x/2^kurikaesi
LET xx=x*x
LET kou=xx
LET y=kou
LET k=3
DO WHILE ABS(kou)>=EPS(0)
   LET kou=-kou*xx/(k*(k+1))
   LET y=y+kou
   LET k=k+2
LOOP
FOR K=1 TO kurikaesi
   LET y=y*(4-y)
NEXT K
LET COS=1-y/2
END FUNCTION
```

付録　指数関数e^xの高速計算法

$e^{2a} = (e^a)^2$ より

$$e^{2a} = \{(e^a - 1) + 1\}^2$$

$$= \{(e^a - 1) + 1\}^2$$
$$= (e^a - 1)^2 + 2(e^a - 1) + 1$$

よって

$$e^{2a} - 1 = (e^a - 1)^2 + 2(e^a - 1)$$
$$= (e^a - 1)\{(e^a - 1) + 2\}$$

したがって，m を自然数の定数として

$$a_0 = e^{\frac{x}{2^m}} \quad \cdots ①$$

とし，漸化式

$$a_{n+1} = a_n(a_n + 2) \quad \text{(n=0，1，2，3，…，m－1)}$$

により a_m を求めれば

$$a_m = e^x - 1$$

となる。①は，マクローリン展開して，

$$a_0 = \frac{x}{2^m} + \frac{1}{2!}\cdot\left(\frac{x}{2^m}\right)^2 + \frac{1}{3!}\cdot\left(\frac{x}{2^m}\right)^3 + \frac{1}{4!}\cdot\left(\frac{x}{2^m}\right)^4 + \cdots$$

を計算すればよい。