3 次方程式の解の公式

3 次方程式 $x^3+Ax^2+Bx+C=0$ において，$X=x+\dfrac{A}{3}$ とおくと，方程式は $X^3+pX+q=0$ の形になる。よって，3 次方程式 $x^3+px+q=0$ を解くことを考える。

まず，整式 $a^3+b^3+c^3-3abc$ を複素数の範囲で因数分解する。

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b)^3-3ab(a+b)+c^3-3abc$$

$$=(a+b)^3+c^3-3ab(a+b+c)$$

$$=\{(a+b)+c\}\{(a+b)^2-(a+b)c+c^2\}-3ab(a+b+c)$$

$$=(a+b+c)\{(a+b)^2-(a+b)c+c^2-3ab\}$$

$$=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$

ところで，3 次方程式 $x^3=1$ の虚数解の 1 つを ω とすると，$\omega^3=1$が成り立つから

$$a^3+b^3+c^3-3abc=a^3+(\omega b)^3+(\omega^2 c)^3-3a(\omega b)(\omega^2 c)=a^3+(\omega^2 b)^3+(\omega c)^3-3a(\omega^2 b)(\omega c)$$

よって，$a+\omega b+\omega^2 c, a+\omega^2 b+\omega c$ も $a^3+b^3+c^3-3abc$ の因数であるが，$a+b+c$，$a+\omega b+\omega^2 c$，$a+\omega^2 b+\omega c$ は，どの 2 つの組も一方が他方の定数倍とはならないから

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a+\omega b+\omega^2 c)(a+\omega^2 b+\omega c)$$

と因数分解できる。この等式の a, b, c をそれぞれ $x, -b, -c$ に置き換えると

$$x^3-3bcx-(b^3+c^3)=(x-b-c)(x-\omega b-\omega^2 c)(x-\omega^2 b-\omega c) \quad \cdots①$$

x^3+px+q を因数分解するには

$$-3bc=p \quad \cdots② \qquad\qquad -(b^3+c^3)=q \quad \cdots③$$

を満たす複素数 b, c を求めればよい。

②．③より

$$b^3c^3=-\frac{p^3}{27}, \qquad b^3+c^3=-q$$

よって，b^3, c^3 は t の 2 次方程式

$$t^2+qt-\frac{p^3}{27}=0$$

の 2 解である。これを解くと

$$t=\frac{-q\pm\sqrt{q^2+\frac{4p^3}{27}}}{2}$$

ここで

$$u=\frac{-q-\sqrt{q^2+\frac{4p^3}{27}}}{2},\quad v=\frac{-q+\sqrt{q^2+\frac{4p^3}{27}}}{2}$$

とおく。方程式はb, cについて対称であるから，$b^3=u, c^3=v$としてよい。

$b^3=u, c^3=v$の解の 1 つをそれぞれ，$\sqrt[3]{u}, \sqrt[3]{v}$とおくと

$$b=\sqrt[3]{u}, \sqrt[3]{u}\omega, \sqrt[3]{u}\omega^2,\quad c=\sqrt[3]{v}, \sqrt[3]{v}\omega, \sqrt[3]{v}\omega^2$$

$uv\neq 0$のときは，b, cの組み合わせによりbcは異なる 3 個の値をとるから，$-3bc=p$を満たす組み合わせが存在する。これを改めて，$b=\sqrt[3]{u}, c=\sqrt[3]{v}$とすると，①より

$$x^3-3bcx-(b^3+c^3)=\left(x-\sqrt[3]{u}-\sqrt[3]{v}\right)\left(x-\omega\sqrt[3]{u}-\omega^2\sqrt[3]{v}\right)\left(x-\omega^2\sqrt[3]{u}-\omega\sqrt[3]{v}\right)$$

と因数分解できる。したがって，方程式 $x^3+px+q=0$ の解は

$$x=\sqrt[3]{u}+\sqrt[3]{v},\quad \omega\sqrt[3]{u}+\omega^2\sqrt[3]{v},\quad \omega^2\sqrt[3]{u}+\omega\sqrt[3]{v}$$

である。

例　3 次方程式 $x^3-3x^2+6x-3=0$ を解いてみよう。

$X=x-1$とおくと，$x=X+1$であるから

$$(X+1)^3-3(X+1)^2+6(X+1)-3=0$$

よって

$$X^3+3X+1=0$$

したがって

$$-3bc=3 \quad \cdots①,\quad -(b^3+c^3)=1 \quad \cdots②$$

を満たすb, cを求めればよい。①，②より

$$b^3+c^3=-1,\quad b^3c^3=-1$$

よって，b^3, c^3はtの 2 次方程式

$$t^2+t-1=0$$

の 2 解である。これを解くと

$$t=\frac{-1\pm\sqrt{5}}{2}$$

b^3, c^3は，この 2 解のどちらとしても良いから

$$b^3=\frac{-1+\sqrt{5}}{2},\, c^3=\frac{-1-\sqrt{5}}{2}$$

とする。①を満たすb, cとして

$$b=\sqrt[3]{\frac{\sqrt{5}-1}{2}},\quad c=-\sqrt[3]{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}$$

をとると

$$x=\sqrt[3]{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}-\sqrt[3]{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}+1,\quad \omega\sqrt[3]{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}-\omega^2\sqrt[3]{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}+1,\quad \omega^2\sqrt[3]{\frac{\sqrt{5}-1}{2}}-\omega\sqrt[3]{\frac{\sqrt{5}+1}{2}}+1$$