指数関数の定義

$a \neq 0$　とする。n が整数のとき，　a^n　を次のように定める。

　　n が正の整数のとき　　$a^n = a \cdot a \cdot a \cdots a$　（a を n 個掛けてできる数）

　　$n=0$ のとき　　$a^n = 1$

　　n が負の整数のとき　　$a^n = \dfrac{1}{a^{-n}}$

このとき，次の指数法則が成り立つ。

指数法則　　$a \neq 0$　で，　r，s　が整数のとき

1　$a^r a^s = a^{r+s}$　　　2　$(a^r)^s = a^{rs}$　　　3　$(ab)^r = a^r b^r$

a を正の実数とするとき，n 乗して a になる正の実数はただ 1 つ存在する。これを　$\sqrt[n]{a}$　と表す。

補題 1　$a>0$ で，m が整数，n，p が正の整数のとき，　$\sqrt[np]{a^{mp}} = \sqrt[n]{a^m}$

証明　　$\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^{np} = \left\{\left(\sqrt[n]{a^m}\right)^n\right\}^p = (a^m)^p = a^{mp}$

よって，　$\sqrt[n]{a^m}$　は np 乗して　a^{mp}　になる正の数であるから，　$\sqrt[np]{a^{mp}} = \sqrt[n]{a^m}$

証明終

r を有理数とする。このとき，m を整数，n を正の整数として　$r = \dfrac{m}{n}$　と表せる。

補題 1 より，　$\sqrt[n]{a^m}$　は有理数 r だけの関数であり，　$a^r = \sqrt[n]{a^m}$　すなわち　$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$　と定める。

このとき，　$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n = a^m$　が成り立つ。また，次の指数法則が成り立つ。

指数法則　$a>0$，$b>0$ で，r，s が有理数のとき

1　$a^r a^s = a^{r+s}$　　　2　$(a^r)^s = a^{rs}$　　　3　$(ab)^r = a^r b^r$

1'　$\dfrac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$　　　　　　3'　$\left(\dfrac{a}{b}\right)^r = \dfrac{a^r}{b^r}$

証明　m，k を整数，n，l を正の整数として，　$r = \dfrac{m}{n}$，$s = \dfrac{k}{l}$　と置く。

1　$(a^r a^s)^{nl} = (a^r)^{nl}(a^s)^{nl} = \left\{\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n\right\}^l \left\{\left(a^{\frac{k}{l}}\right)^l\right\}^n = (a^m)^l (a^k)^n = a^{ml} a^{kn} = a^{ml+kn}$

　よって，　$a^r a^s$　は nl 乗して　a^{ml+kn}　になる正の数であるから，　$a^r a^s = a^{\frac{ml+kn}{nl}} = a^{\frac{m}{n}+\frac{k}{l}} = a^{r+s}$

2　$\{(a^r)^s\}^{nl}=\left[\left\{(a^r)^{\frac{k}{l}}\right\}^l\right]^n=\{(a^r)^k\}^n=\left\{\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n\right\}^k=(a^m)^k=a^{mk}$　よって　$(a^r)^s=a^{\frac{mn}{nl}}=a^{\frac{m}{n}\cdot\frac{k}{l}}=a^{rs}$

3　$(a^r b^r)^n=\left(a^{\frac{m}{n}}b^{\frac{m}{n}}\right)^n=\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n\left(b^{\frac{m}{n}}\right)^n=a^m b^m=(ab)^m$　よって　$a^r b^r=(ab)^{\frac{m}{n}}=(ab)^r$

1'　$a^{r-s}a^s=a^{r-s+s}=a^r$　より　$\frac{a^r}{a^s}=a^{r-s}$

3'　$\left(\frac{a}{b}\right)^r b^r=\left(\frac{a}{b}\cdot b\right)^r=a^r$　より　$\left(\frac{a}{b}\right)^r=\frac{a^r}{b^r}$

証明終

以下，$a>1$ とする。

補題 2　r，s が有理数のとき，$r<s$ ならば　$a^r<a^s$　である。

証明　t を正の有理数とする。このとき，m，n を正の整数として，　$t=\frac{m}{n}$　と表わされる。

$a^t\leqq 1$　すなわち　$a^{\frac{m}{n}}\leqq 1$　と仮定すると，　$\left(a^{\frac{m}{n}}\right)^n\leqq 1$　であるから　$a^m\leqq 1$

ところが，$a>1$ より　$a^m>1$　であるから矛盾する。したがって，　$a^t>1$

ここで，s-r は正の有理数であるから，　$\frac{a^s}{a^r}=a^{s-r}>1$　よって　$a^r<a^s$

証明終

補題 3　$\lim_{n\to\infty}a^{\frac{1}{n}}=1$，$\lim_{n\to\infty}a^{-\frac{1}{n}}=1$

証明　数列　$\left\{\frac{1}{n}\right\}$　は単調に減少するから，数列　$\left\{a^{\frac{1}{n}}\right\}$　は単調に減少する。

また，　$\frac{1}{n}>0$　であるから　$a^{\frac{1}{n}}>a^0=1$

よって，数列　$\left\{a^{\frac{1}{n}}\right\}$　には極限値 α が存在し $\alpha\geqq 1$ である。

このとき，　$a^{\frac{1}{n}}\geqq\alpha$　であるから，　$\left(a^{\frac{1}{n}}\right)^n\geqq\alpha^n$　すなわち　$a\geqq\alpha^n$

ここで，$\alpha>1$ と仮定すると，n が十分大きいときに　$\alpha^n>a$　となり矛盾するから，$\alpha=1$ である。

したがって，　$\lim_{n\to\infty}a^{\frac{1}{n}}=1$　，　$\lim_{n\to\infty}a^{-\frac{1}{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{a^{\frac{1}{n}}}=\frac{1}{1}=1$

証明終

補題 4　有理数の数列　$\{r_n\}$　が　$\lim_{n\to\infty}r_n=0$　となるとき，　$\lim_{n\to\infty}a^{r_n}=1$　である。

証明　$\lim_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}}=1$, $\lim_{n\to\infty} a^{-\frac{1}{n}}=1$　であるから，任意の $\varepsilon>0$ に対して，ある自然数 N が存在して，

$0<1-a^{-\frac{1}{N}}<\varepsilon$　かつ　$0<a^{\frac{1}{N}}-1<\varepsilon$　となる。

また，　$|r_n|<\dfrac{1}{N}$　ならば，　$a^{-\frac{1}{N}}<a^{r_n}<a^{\frac{1}{N}}$　である。

よって，　$|r_n|<\dfrac{1}{N}$　ならば，　$-\varepsilon<a^{-\frac{1}{N}}-1<a^{r_n}-1<a^{\frac{1}{N}}-1<\varepsilon$　となるから　$|a^{r_n}-1|<\varepsilon$　となる。

ここで，　$\lim_{n\to\infty} r_n=0$　であるから，　ある自然数 M が存在して，　$n>M$　ならば　$|r_n|<\dfrac{1}{N}$　となる。

したがって，　$n>M$　ならば　$|a^{r_n}-1|<\varepsilon$　となるから，　$\lim_{n\to\infty} a^{r_n}=1$　である。

証明終

補題 5　有理数の数列　$\{r_n\}$, $\{s_n\}$　が　$\lim_{n\to\infty} r_n=\alpha$, $\lim_{n\to\infty} s_n=\alpha$　となるとき，　$\lim_{n\to\infty} a^{r_n}=\beta$　ならば

$\lim_{n\to\infty} a^{s_n}=\beta$　である。

証明　$\lim_{n\to\infty}(s_n-r_n)=0$　であるから　$\lim_{n\to\infty} a^{s_n}=\lim_{n\to\infty}\{a^{r_n}+a^{r_n}(a^{s_n-r_n}-1)\}=\beta+\beta(1-1)=\beta$

証明終

数列　$\{r_n\}$　は，単調に増加する有理数の数列で，無理数 α に対して　$\lim_{n\to\infty} r_n=\alpha$　となるとする。有理数 p を $\alpha<p$ となるようにとれば，任意の自然数 n について　$a^{r_n}<a^p$　となる。よって，数列　$\{a^{r_n}\}$　には極限値が存在するので，その極限値を β とする。このとき，補題 5 より，有理数の数列　$\{s_n\}$　が

$\lim_{n\to\infty} s_n=\alpha$　となれば　$\lim_{n\to\infty} a^{s_n}=\beta$　となるから，　$a^{\alpha}=\beta$　と定める。

補題 6　無理数 α と有理数 r, s について，$r<\alpha<s$ ならば　$a^r<a^{\alpha}<a^s$　である。

証明　$\{r_n\}$　は単調に増加する有理数の数列で，　$r<r_1$　かつ　$\lim_{n\to\infty} r_n=\alpha$　を満たすとする。

$\{s_n\}$　は単調に減少する有理数の数列で，　$s_1<s$　かつ　$\lim_{n\to\infty} s_n=\alpha$　を満たすとする。

このとき，　$a^r<\lim_{n\to\infty} a^{r_n}=a^{\alpha}=\lim_{n\to\infty} a^{s_n}<a^s$　であるから　$a^r<a^{\alpha}<a^s$　である。

証明終

定理 1　r, s が実数のとき，$r<s$ ならば　$a^r<a^s$　である。（関数　$y=a^x$　は単調に増加する）

証明　r, s の少なくとも 1 つが有理数のときに　$a^r<a^s$　であることは既に示した。

r，s がともに無理数のときは，$r<u<s$ となる有理数が u が存在して $a^r<a^u<a^s$ となるから，

$a^r<a^s$ である。

証明終

定理 2 $\displaystyle\lim_{x\to\alpha} a^x=a^\alpha$ （関数 $y=a^x$ は連続である）

証明 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a^{\frac{1}{n}}=1$ であるから， $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a^\alpha\left(a^{\frac{1}{n}}-1\right)=0$

よって，任意の $\varepsilon>0$ に対して，ある自然数 N が存在して， $0<a^\alpha\left(a^{\frac{1}{N}}-1\right)<\varepsilon$ となる。

$|x-\alpha|<\dfrac{1}{N}$ とする。このとき， $r<x<s$，$r<\alpha<s$，$s-r<\dfrac{1}{N}$ となる有理数 r，s が存在する。

関数 $y=a^x$ は単調に増加するから， $a^r<a^x<a^s$，$a^r<a^\alpha<a^s$，$a^{s-r}<a^{\frac{1}{N}}$ であり

$$|a^x-a^\alpha|<a^s-a^r=a^r(a^{s-r}-1)<a^\alpha\left(a^{\frac{1}{N}}-1\right)<\varepsilon$$

したがって， $\displaystyle\lim_{x\to\alpha} a^x=a^\alpha$

証明終

注 上の証明で $u=\dfrac{x+\alpha}{2}-\dfrac{1}{2N}$，$v=\dfrac{x+\alpha}{2}+\dfrac{1}{2N}$ とおけば $u<x<v$，$u<\alpha<v$，$v-u=\dfrac{1}{N}$ である。

よって，2 つの実数 x，α の最大値を M，最小値を m とするとき，開区間（u，m）から有理数 r を，

開区間（M，v）から有理数 s をとれば $r<x<s$，$r<\alpha<s$，$s-r<\dfrac{1}{N}$ となる。

$a>0$ で，r が有理数のとき， $\left(\dfrac{1}{a}\right)^{-r}=(a^{-1})^{-r}=a^{(-1)\cdot(-r)}=a^r$ となる。そこで，

$0<a<1$ で，r が実数のとき， $a^r=\left(\dfrac{1}{a}\right)^{-r}$ と定める。

$a=1$ のときは，任意の実数 r に対して $a^r=1$ と定める。

$a>0$ とするとき，関数 $y=a^x$ は連続であり，$0<a<1$ のときは単調に減少する。

指数法則

前出の指数法則は，$a>0$，$b>0$ で，r，s が実数のときも成り立つ。

まず，1，3 を示す。このとき，1’，3’ も成り立つ。

証明 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} r_n=r$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} s_n=s$ となる有理数の数列 $\{r_n\}$，$\{s_n\}$ が存在する。

関数　$y=a^x$　は連続であるから

1　$\lim_{n\to\infty} a^{r_n} a^{s_n}=a^r a^s$　，　$\lim_{n\to\infty} a^{r_n} a^{s_n}=\lim_{n\to\infty} a^{r_n+s_n}=a^{r+s}$　よって　$a^r a^s=a^{r+s}$

3　$\lim_{n\to\infty} (ab)^{r_n}=(ab)^r$　，　$\lim_{n\to\infty} (ab)^{r_n}=\lim_{n\to\infty} a^{r_n} b^{r_n}=a^r b^r$　よって　$(ab)^r=a^r b^r$

証明終

次の補題は，指数法則 2 の証明に用いる。

補題 7　a，b，r が正の実数のとき，　$a<b$　ならば　$a^r<b^r$　である。

（$r>0$ のとき，関数　$y=x^r$　$(x>0)$　は単調に増加する）

証明　$\frac{b}{a}>1$，$r>0$　であるから　$\frac{b^r}{a^r}=\left(\frac{b}{a}\right)^r>\left(\frac{b}{a}\right)^0=1$　よって　$a^r<b^r$

証明終

2　$a>1$ で，$r>0$，$s>0$ の場合

関数　$y=a^x$　は連続であるから　$\lim_{n\to\infty} (a^{r_n})^{s_n}=\lim_{n\to\infty} a^{r_n s_n}=a^{rs}$

数列　$\{r_n\}$，$\{s_n\}$　を，任意の自然数 n について　$r_n<r$，$s_n<s$　となるようにとる。このとき

$1<a^{r_n}<a^r$　であるから，　$(a^{r_n})^{s_n}<(a^r)^{s_n}<(a^r)^s$

よって　$\lim_{n\to\infty} (a^{r_n})^{s_n} \leqq (a^r)^s$　となるから　$a^{rs} \leqq (a^r)^s$

また，任意の自然数 n について　$r_n>r$，$s_n>s$　となるようにとると，同様にして　$a^{rs} \geqq (a^r)^s$

したがって，　$(a^r)^s=a^{rs}$　である。

$r=0$ または $s=0$ の場合と，$a=1$ の場合は，　$(a^r)^s=1=a^{rs}$　である。

他の場合は，上記と同様に証明できる。

証明終

参考　r が無理数であるときの　a^r　は，次のように定義することもできる。

無理数 α に対して，集合　$D_\alpha=\{a^r \mid r<\alpha,\ r\text{は有理数}\}$　を考える。有理数 p を $\alpha<p$ となるようにとれば，　D_α　において　$a^r<a^p$　となる。さらに，　$x\in D_\alpha$　ならば常に $x\leqq y$ となるような実数 y の集合を　U_α　とする。このとき，実数の性質により　U_α　には最小値が存在し，その値を　a^α　と定める。

（上に有界な集合　D_α　の上限を　a^α　と定める。）

補題　無理数 α と有理数 r，s について，$r<\alpha<s$ ならば　$a^r<a^\alpha<a^s$　である。

証明　$r<u<\alpha<v<s$ となる有理数 u，v が存在して，　$a^r<a^u$，$a^v<a^s$　である。ここで

a^u　は　D_α　の要素，　a^α　は　U_α　の要素であるから，　$a^u \leqq a^\alpha$

a^v　は　U_α　の要素，　a^α　は　U_α　の最小値であるから，　$a^\alpha \leqq a^v$

以上より，　$a^r<a^\alpha<a^s$　である。

証明終

対数関数・指数関数の定義

xを正の実数として $f(x)=\int_1^x \frac{dt}{t}$ とする。ここで，定積分は区分求積法によるものとする。

このとき， $f'(x)=\frac{1}{x}$ である。

関数 $y=f(x)$ は単調増加で連続であり，定義域は $x>0$ ，値域は実数全体である。(注)

よって， $f(x)$ には逆関数が存在するので，それを $g(x)$ とする。

$y=g(x)$ とおくと， $x=f(y)$ であるから， $\frac{dx}{dy}=f'(y)=\frac{1}{y}$

よって， $\frac{dy}{dx}=y$ であるから， $g'(x)=g(x)$ である。

関数 $y=g(x)$ は単調増加で連続であり，定義域は実数全体，値域は $y>0$ である。

また，

$$f(M)=p \iff M=g(p)$$
$$f(g(x))=x,\ g(f(x))=x$$
$$f(1)=0,\ g(0)=1$$
$$0<p=q \iff f(p)=f(q), \qquad p=q \iff g(p)=g(q)$$

が成り立つ。

(注) 定理 2 により，n が自然数のとき $f(2^n)=n\cdot f(2)$，$f(2^{-n})=-n\cdot f(2)$ で， $f(2)>0$ であるから

$$\lim_{n\to\infty} f(2^n)=\infty,\ \lim_{n\to\infty} f(2^{-n})=-\infty$$

したがって， $f(x)$ の値域は実数全体である。

定理 1　$M>0$，$N>0$ のとき

$$f(MN)=f(M)+f(N)\ ,\quad f\left(\frac{M}{N}\right)=f(M)-f(N) \qquad 特に，\ f\left(\frac{1}{N}\right)=-f(N)$$

証明　$f(MN)=\int_1^{MN}\frac{dt}{t}=\int_1^{M}\frac{dt}{t}+\int_M^{MN}\frac{dt}{t}=f(M)+\int_M^{MN}\frac{dt}{t}$

ここで， $t=Mu$ とおくと $\int_M^{MN}\frac{dt}{t}=\int_1^N\frac{du}{u}=f(N)$

よって $f(MN)=f(M)+f(N)$

また， $f(M)=f\left(\frac{M}{N}\cdot N\right)=f\left(\frac{M}{N}\right)+f(N)$ より $f\left(\frac{M}{N}\right)=f(M)-f(N)$

特に　$M=1$　のとき，　$f(1)=0$　であるから　$f\left(\frac{1}{N}\right)=-f(N)$

証明終

定理 2　n が整数のとき，　$n\cdot f(x)=f(x^n)$

証明　　$n>0$　のとき　　　$n\cdot f(x)=f(x)+f(x)+\cdots+f(x)=f(x^n)$

$n=0$　のとき　　　$n\cdot f(x)=0=f(1)=f(x^n)$

$n<0$　のとき　　　$n\cdot f(x)=-(-n)\cdot f(x)=-f(x^{-n})=f\left(\frac{1}{x^{-n}}\right)=f(x^n)$

証明終

$a>0$，$a\neq 1$　として　$f_a(x)=\frac{f(x)}{f(a)}$　と定める。

$y=\frac{f(x)}{f(a)}$　とおくと，　$f(x)=f(a)y$　であるから，　$x=g(f(a)y)$

よって，　$y=f_a(x)$　の逆関数は　$y=g(f(a)x)$　であり，　$g_a(x)=g(f(a)x)$　と定める。

定理 3　m が整数，n が正の整数のとき　$f_a(\sqrt[n]{a^m})=\frac{m}{n}$，　$g_a\left(\frac{m}{n}\right)=\sqrt[n]{a^m}$

証明　　$n\cdot f(\sqrt[n]{a^m})=f\left((\sqrt[n]{a^m})^n\right)=f(a^m)=m\cdot f(a)$

よって　　$\frac{f(\sqrt[n]{a^m})}{f(a)}=\frac{m}{n}$　であるから　$f_a(\sqrt[n]{a^m})=\frac{m}{n}$

また，　$g_a(x)$　は　$f_a(x)$　の逆関数であるから，　$g_a\left(\frac{m}{n}\right)=\sqrt[n]{a^m}$

証明終

定理 3 が示されたので，　$f_a(x)$　を　$\log_a x$　，　$g_a(x)$　を　a^x　と表すことにする。

すなわち，　$\log_a x=\frac{f(x)}{f(a)}$，$a^x=g(f(a)x)$　と定める。

このとき，定理 3 により　$\log_a \sqrt[n]{a^m}=\frac{m}{n}$，$a^{\frac{m}{n}}=\sqrt[n]{a^m}$　が成り立つ。

関数　$y=\log_a x$　の逆関数は　$y=a^x$　である。

関数　$y=\log_a x$　は単調で連続であり，定義域は　$x>0$　，値域は実数全体である。

関数　$y=a^x$　は単調で連続であり，定義域は実数全体，値域は　$y>0$　である。

よって，次のことが成り立つ。

$M>0$ のとき $p=\log_a M \Leftrightarrow a^p=M$

$0<p=q \Leftrightarrow \log_a p=\log_a q$，　$p=q \Leftrightarrow a^p=a^q$

対数の性質

$\log_a a=1$，　$\log_a 1=0$，　$\log_a \frac{1}{a}=-1$ が成り立つ。

対数法則　$a>0$，$a\neq 1$，$M>0$，$N>0$ で，k が実数のとき，

1　$\log_a MN=\log_a M+\log_a N$　　2　$\log_a \frac{M}{N}=\log_a M-\log_a N$　　3　$\log_a M^k=k\log_a M$

証明　1，2 は，　$\log_a x=\dfrac{f(x)}{f(a)}$ と定理 1 により成り立つ。

3　$\log_a M^k=\dfrac{f(M^k)}{f(a)}=\dfrac{f(g(f(M)k))}{f(a)}=\dfrac{f(M)k}{f(a)}=k\log_a M$

証明終

3 より $\log_a a^k=k\log_a a$ であるから，　$\log_a a^k=k$ が成り立つ。

底の変換公式

a，b，c は正の実数で，　$a\neq 1$，$c\neq 1$ のとき

$\dfrac{f(b)}{f(a)}=\dfrac{\frac{f(b)}{f(c)}}{\frac{f(a)}{f(c)}}$ より $\log_a b=\dfrac{\log_c b}{\log_c a}$ が成り立つ。

指数の性質

任意の実数 x に対して，　$1^x=1$ と定める。

指数法則　$a>0$，$b>0$ で，　r，s が実数のとき

1　$a^r a^s=a^{r+s}$　　2　$(a^r)^s=a^{rs}$　　3　$(ab)^r=a^r b^r$

1'　$\dfrac{a^r}{a^s}=a^{r-s}$　　3'　$\left(\dfrac{a}{b}\right)^r=\dfrac{a^r}{b^r}$

証明　1，2，3 は $a=1$ のときは明らかに成り立つので，　$a\neq 1$ として示す。

1　$\log_a(a^r a^s)=\log_a a^r+\log_a a^s=r+s$ よって $a^r a^s=a^{r+s}$

2　$\log_a (a^r)^s = s\log_a a^r = rs$　よって　$(a^r)^s = a^{rs}$

3　$\log_a (ab)^r = r\log_a (ab) = r(\log_a a + \log_a b) = r + r\log_a b$

$\log_a (a^r b^r) = \log_a a^r + \log_a b^r = r + r\log_a b$

よって，　$\log_a (ab)^r = \log_a (a^r b^r)$　であるから　$(ab)^r = a^r b^r$

1'　$a^{r-s}a^s = a^{r-s+s} = a^r$　より　$\dfrac{a^r}{a^s} = a^{r-s}$

3'　$\left(\dfrac{a}{b}\right)^r b^r = \left(\dfrac{a}{b}\cdot b\right)^r = a^r$　より　$\left(\dfrac{a}{b}\right)^r = \dfrac{a^r}{b^r}$

証明終

自然対数の底 *e*

関数　$y=f(x)$　は単調増加で連続であり，値域は実数全体であるから，　$f(x)=1$　を満たす実数 x は，ただ 1 つ存在する。その実数 x を e とすると　$f(e)=1$　である。

このとき，　$\log_e x = f(x)$，$e^x = g(x)$　であるから，　$(\log_e x)' = \dfrac{1}{x}$，$(e^x)' = e^x$　が成り立つ。

定理 4　$\displaystyle\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}} = e$

証明　$f(x)$　の定義より　$f'(x) = \dfrac{1}{x}$　となるから，　$f'(1) = 1$

また　$\displaystyle f'(1) = \lim_{h\to 0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h} = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot f(1+h) = \lim_{h\to 0} f\left((1+h)^{\frac{1}{h}}\right)$

よって　$\displaystyle\lim_{h\to 0} f\left((1+h)^{\frac{1}{h}}\right) = 1$

$f(x)$　は単調増加で連続であるから　$\displaystyle\lim_{h\to 0}(1+h)^{\frac{1}{h}} = g(1) = e$

証明終

定理 4 において，特に　$h = \dfrac{1}{n}$　（n は自然数）という値だけを考えると，　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$