

証明

左側部分と右側部分の一方がなくなった後にアルゴリズムがどう機能するかが問題である。よって、左側部分に1個、右側部分に $n(n \geq 1)$ 個ある状態から、左側部分の1個が取られる場合を考える。

このとき、左側部分について $i=x=x_0=i_0$ とする。

[I] i_0+1 が左側部分からはみ出していないとき、左側部分の1個が小さい方から取られ、 $i=i_0+1$ となったとする。

$\text{array}[x_0+1]$ は既に大きい方から取られているから

$$\text{array}[i_0+1]=\text{array}[x_0+1]>\text{array}[y]$$

また

$$\text{array}[y] \geq \text{array}[j]$$

よって

$$\text{array}[i_0+1]>\text{array}[y] \geq \text{array}[j]$$

したがって、

$$\text{array}[i]>\text{array}[y] \geq \text{array}[j] \quad \dots \textcircled{1}$$

また、このとき

$$\text{array}[i_0] \leq \text{array}[j]$$

であるから、

$$\text{array}[x]=\text{array}[i_0] \leq \text{array}[j] \leq \text{array}[y] \quad \dots \textcircled{2}$$

①, ②より、その後、小さい方から取っても大きい方から取っても、 $\text{array}[y]$ から $\text{array}[j]$ までのすべてをとることができる。

[II] x_0-1 が左側部分からはみ出していないとき、左側部分の1個が大きい方から取られ、 $x=x_0-1$ となったとする。

$\text{array}[i_0-1]$ は既に小さい方から取られているから

$$\text{array}[x_0-1]=\text{array}[i_0-1] \leq \text{array}[j]$$

また

$$\text{array}[j] \leq \text{array}[y]$$

よって

$$\text{array}[x_0-1] \leq \text{array}[j] \leq \text{array}[y]$$

したがって

$$\text{array}[x] \leq \text{array}[j] \leq \text{array}[y] \quad \dots \textcircled{3}$$

また、このとき

$$\text{array}[x_0]>\text{array}[y]$$

であるから、

$$\text{array}[i]=\text{array}[x_0]>\text{array}[y] \geq \text{array}[j] \quad \dots \textcircled{4}$$

③, ④より、その後、小さい方から取っても大きい方から取っても、 $\text{array}[y]$ から $\text{array}[j]$ までのすべてをとることができる。

[I],[II]より i_0-1 と x_0+1 がともに左側部分からはみ出していないとき

左側部分の1個が取られれば、その後、右側はすべて取られる。

したがって、問題になるのは、 $i=x=left$ のときと、 $i=x=mid-1$ のときのときである。

ここで、元の左側部分のデータ数と右側部分のデータ数は、同数か1個違いである場合を考える。

以下で、左側部分のデータ数は n 個とする。

[III] $i=x=left$ のとき

左側の1個が小さい方から取られれば、[I]より、残りは右側部分から取られる。よって、左側の1個が大きい方から取られた場合を考えればよい。

左側部分は、大きい方からだけ n 個取られ、小さい方から1個も取られていないので、右側部分は小さい方から n 個以上取られている。元の左側部分と右側部分のデータの個数の差は1個以内であるから、元の右側部分のデータ数が左側部分よりデータの個数が1個多く、右側部分に1個しか残らない場合だけが考えられる。これを別に処理すればよい。

[IV] $i=x=mid-1$ のとき

左側の1個が大きい方から取られれば、[II]より、残りは右側部分から取られる。

よって、左側の1個が小さい方から取られた場合を考えればよい。

左側部分は、小さい方からだけ n 個取られ、大きい方から1個も取られていないので、右側部分は小さい方から $n-1$ 個以上取られている。元の左側部分と右側部分のデータの個数の差は1個以内であるから、右側部分にはデータが1個または2個しか残っていない。次は大きい方から取るが、 x の値は左側部分からはみ出していないので、右側部分から取られる。このとき、右側部分に1個残った場合は、これを別に処理すればよい。

[III], [IV]で1個残った場合は、 $i \neq x$, $j=y$ が成り立つ。 $j=y$ の1個を処理すればよい。

右側部分に1個、左側部分に $n(n \geq 1)$ 個ある状態から、右側部分の1個が取られる場合も同様である。