多倍長除算

筆算の方法によるアルゴリズムを示す。基数を b とする。
まず，n+1 桁と n 桁の除算を方法を示す。

$$u = u_n b^n + u_{n-1} b^{n-1} + \cdots + u_0,\quad v = v_{n-1} b^{n-1} + v_{n-2} b^{n-2} + \cdots + v_0 \quad \cdots① \quad (u_n \geqq 0, v_{n-1} \neq 0)$$

ただし　$u < bv$ …②　を満たすとする　（注）$u \geqq bv$ のときは，u は n+2 桁と考えるに対して

$$u = qv + r \quad (0 \leqq r < v) \quad \cdots③$$

となる q, r を求めよう。そのために q が充たす n 条件を求める。
③より

$$qv \leqq u \cdots④$$

①より　$qv_{n-1} b^{n-1} \leqq u < u_n b^n + (u_{n-1}+1) b^{n-1}$　$(\because \quad u_{n-2} b^{n-2} + u_{n-3} b^{n-3} + \cdots + u_0 < b^{n-1})$

よって　$q < \dfrac{u_n b + u_{n-1} + 1}{v_{n-1}}$

q，$u_n b + u_{n-1} + 1$，v_{n-1} は整数であるから，$\dfrac{u_n b + u_{n-1}}{v_{n-1}} < q < \dfrac{u_n b + u_{n-1} + 1}{v_{n-1}}$ とは成り得ない。

したがって　$q \leqq \dfrac{u_n b + u_{n-1}}{v_{n-1}}$

ゆえに　$q \leqq \left\lfloor \dfrac{u_n b + u_{n-1}}{v_{n-1}} \right\rfloor$ …⑤

また，②，④より　$qv < bv$　であるから　$q < b$
したがって　$q \leqq b - 1$ …⑥
ここで,

1. $\left\lfloor \dfrac{u_n b + u_{n-1}}{v_{n-1}} \right\rfloor$，$b-1$ のうちで小さい方を q_1 とし

$r_1 = u - q_1 v$　とする。

2. $r_1 \geqq 0$ となるまで　$q_1 := q_1 - 1$，$r_1 := r_1 + v$　を繰り返す。

このアルゴリズムにより得られる q_1, r_1 が求める q, r である。このとき，確かに $0 \leqq r < v$ を満たす。
2.の繰り返しの回数を少なくする方法を考えよう。

$\left\lfloor \dfrac{u_n b + u_{n-1}}{v_{n-1}} \right\rfloor$，$b-1$ のうちで小さい方を q_1 とすれば，求める回数は　$q_1 - q$ である。

$$q_1 \leqq \frac{u_n b + u_{n-1}}{v_{n-1}} = \frac{u_n b^n + u_{n-1} b^{n-1}}{v_{n-1} b^{n-1}} \leqq \frac{u}{v_{n-1} b^{n-1}}$$

また，③より　$u < qv + v$　であるから　$q > \dfrac{u}{v} - 1$

よって　$q_1 - q < \dfrac{u}{v_{n-1}b^{n-1}} - (\dfrac{u}{v} - 1)$

$$= \frac{u}{v} \cdot \frac{v}{v_{n-1}b^{n-1}} - \frac{u}{v} + 1$$

$$= \frac{u}{v} \cdot \frac{v - v_{n-1}b^{n-1}}{v_{n-1}b^{n-1}} + 1$$

$$= \frac{u}{v} \cdot \frac{v_{n-2}b^{n-2} + v_{n-3}b^{n-3} + \cdots + v_0}{v_{n-1}b^{n-1}} + 1$$

$$< \frac{u}{v} \cdot \frac{b^{n-1}}{v_{n-1}b^{n-1}} + 1$$

$$= \frac{u}{v} \cdot \frac{1}{v_{n-1}} + 1$$

$$< \frac{b}{v_{n-1}} + 1 \quad (\because \quad ②より \frac{u}{v} < b)$$

すなわち　　$q_1 - q < \dfrac{b}{v_{n-1}} + 1$

特に，$v_{n-1} \geqq \dfrac{b}{2}$ となるときを考える。このとき　$\dfrac{b}{v_{n-1}} \leqq 2$　となるから

$q_1 - q < \dfrac{b}{v_{n-1}} + 1 \leqq 3$　したがって　$q_1 - q \leqq 2$

この条件を満たすためには u，v に，$v_{n-1} \geqq \dfrac{b}{2}$ となるような整数 k を掛けて除算を行えばよい。このとき，商は q のままである。余りは kr となるので，kr を k で割れば求める余りが得られる。特に，b が 2 の冪乗のときには，k も 2 の冪乗として，u，v にシフト演算を用いて v_{n-1} の最上位 bit を 1 にすればよい。

次に，n 桁と m 桁（n＞m）の除算の方法を考える。

$u = u_n b^n + u_{n-1}b^{n-1} + \cdots + u_0$，　$v = v_m b^m + v_{m-1}b^{m-1} + \cdots + v_0$　…①　$(u_n \geqq 0, v_m \neq 0)$

とする。このとき

$v' = b^{n-m-1}v$

とすると，u と v' の除算は n 桁と n－1 桁の除算となるので，前述の方法が使える。

ただし　$u < bv'$　を満たさない場合は，n を 1 だけ増やして $u_n = 0$ と考えれば，$u < bv'$ が満たされる。

n 桁と n－1 桁の除算で商と余りを求めれば，

$u = qv' + r \quad (0 \leqq r < v')$

となる。

よって，r を新たな u と考え，$v'' = v'/b$ を新たな v と考えれば，$0 \leqq r < v'$ より $u < bv$ が満たされる。

このようにして n 桁と n－1 桁の除算を繰り返せば，n 桁と m 桁（n＞m）の除算ができる。