**平成 29 年度大阪大学一般入試(前期日程)における物理の出題ミス問題の解説**

**問題文** (http://www.osaka-u.ac.jp/ja/news/info/nyushi/06 より引用)

A. 音叉（おんさ）を音源として用いる実験で，空気中の音速を求めてみよう。使用する音叉は，振動数 500 Hz の音を，必要なだけ長い時間にわたって発し続けるとする。

A -I. 気体中の音波は縦波であり，圧力の高い状態（密）と低い状態（疎）を繰り返すことから疎密波ともよばれる。音叉は，２本の平行な腕を持つU字型の金属製道具であり，楽器の調律などに使用される。腕の部分をたたくと，ある特定の振動数の音だけを発する。図１は，振動している音叉を上から見た状況を示している。矢印は，ある瞬間に音叉の腕が動いている向きを表している。音叉が音を発するときは，このように２本の腕は互いに逆向きに振動し，周囲の空気に圧力変動を与えている。

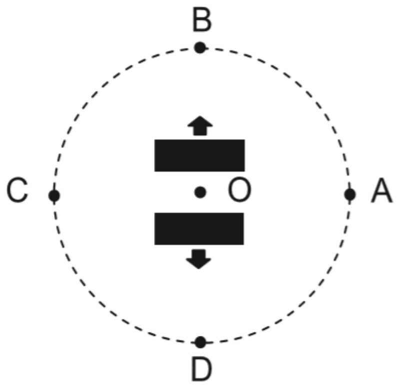


図１

問 1 図１の２つの矢印が示す向きに音叉の腕が運動し，開ききったときの周囲の圧力について考えよう。音叉を囲む円周上にある４つの点 A〜D での空気の疎密に関して，以下の（ａ）〜（ｆ）のうちから正しい組み合せの記号を選べ。

円の中心は音叉の中心 O にあり，その半径は音波の波長にくらべて十分小さく，４つの点は音叉の振動方向とこれに垂直な方向にある。

（ａ）A：密，B：密，C：疎，D：疎

（ｂ）A：密，B：疎，C：疎，D：密

（ｃ）A：密，B：疎，C：密，D：疎

（ｄ）A：疎，B：疎，C：密，D：密

（ｅ）A：疎，B：密，C：密，D：疎

（ｆ）A：疎，B：密，C：疎，D：密

（A -II.省略）

A -III. ２つ目の実験として，音叉を固定壁の近くに置き，壁からの反射音を利用してみよう。図３のように，壁面に垂直にとった y 軸に沿って音叉を移動させる。また，壁から遠く離れた y 軸上の位置にマイクロフォンを固定する。マイクロフォン は，音叉から直接達する音と壁からの反射音を観測する。こ

の実験では，音叉は十分小さく，点音源と見なせる。


図 3

問 4 y 軸の正の方向に音叉の位置を少しずつ変えながらマイクロフォンで観測すると，音の強さが周期的に変動した。マイクロフォンで観測された音が強くなるときの，音叉と壁の間の距離 d と音の波長 λ との関係を表せ。必要であれば，自然数として n（n = 1,2,3,…）を用いてよい。

問 5 25 cm ≦ d≦ 100 cm の範囲で 2 度の実験を行ったところ，強い音が， 1 度目は d = 50 cm と 81 cm で， 2 度目は d = 49 cm と 83 cm のそれぞれ 2 か所で観測された。これらの実験データから，音速を有効数字 2 桁で推定せよ。

**解説**

音波の反射における解説によく同位相，逆位相という言葉が表れるが，意味が明確でないので，代わりにグラフの対称移動を用いる。

**補題**　関数 $y=f(x)$ のグラフを点 $(a,0)$ に関して対称移動したグラフの方程式は $y=-f(-x+2a)$ である。

**証明**　原点に関する対称移動では

$$y=f(x)\rightarrow y=-f(-x)$$

点 $(a,0)$ に関する対称移動は， $x$ 軸方向に $-a$ だけ平行移動し，原点に関して対称移動し， $x$ 軸方向に $a$ だけ平行移動すれば得られるから

$$y=f(x)\rightarrow y=f(x+a)\rightarrow y=-f(-x+a)\rightarrow y=-f(-(x-a)+a)=-f(-x+2a)$$

すなわち $y=-f(-x+2a)$ である。

□

**注意**　$g(x)=f(x)+\{-f(-x+2a)\}$ とすると， $y=g(x)$ のグラフは点 $(a,0)$ に関して対称であり， $g(a)=f(a)-f(-a+2a)=0$ である。

**壁による音波の反射**

音叉の位置を原点にとり，壁から音叉に向かう方向を $x$ 軸の正の方向とする。

壁に向かって進む音波について考える。音波の速度は負であるから，空気の変位は

$$y=\sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda}+\omega t\right) \quad \cdots①$$

で表されるとして良いであろう。（実際は振幅は徐々に減少する）

音叉から壁までの距離は $d$ であるから壁は $x=-d$ の位置にあり，①において $x=-d$ のとき

$$y=\sin\left(\frac{-2\pi d}{\lambda}+\omega t\right)$$

である。ところで，問題文に固定壁とあるので，壁のごく近くの空気は変位しないと考えてよい。よって，この変位を打ち消すような音波（反射波）が発生しなければならない。反射波の波長と振動数は元の音波と同じであるから，反射波の変位は，①のグラフを点 $\left(-d\,,\,0\right)$ に関して対称移動したグラフの方程式

$$y=-\sin\left(\frac{2\pi\left(-x-2d\right)}{\lambda}+\omega t\right)$$

で表される。変形して

$$y=\sin\left(\frac{2\pi\left(x+2d\right)}{\lambda}-\omega t\right)$$

$$y=\sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda}-\omega t+\frac{4\pi d}{\lambda}\right) \quad \cdots②$$

②が反射波の変位を表す。

**音叉からマイクロフォンに向かって進む音波**

音叉の２本の腕は，互いに逆向きに振動するから，音叉からマイクロフォンに向かって進む音波の変位は，①のグラフを原点(音叉のある位置)に関して対称移動したグラフの方程式

$$y=-\sin\left(\frac{-2\pi x}{\lambda}+\omega t\right) \text{ すなわち } y=\sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda}-\omega t\right) \quad \cdots③$$

で表される。

なお，音叉の２本の腕が同じ向きに振動する場合は，音叉からマイクロフォンに向かって進む音波の変位は，①のグラフを $y$ 軸に関して対称移動したグラフの方程式

$$y=\sin\left(\frac{-2\pi x}{\lambda}+\omega t\right) \text{ すなわち } y=-\sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda}-\omega t\right)$$

で表される。

**音叉から出た音波と壁で反射した音波の合成**

②の波と③の波を重ね合わせた波がマイクロフォンに向かって進む。合成された変位は

$$y=\sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda}-\omega t+\frac{4\pi d}{\lambda}\right)+\sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda}-\omega t\right) \quad \cdots④$$

よって，２つの波が強め合う条件は $\sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda}-\omega t+\frac{4\pi d}{\lambda}\right)=\sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda}-\omega t\right)$ となることであるから

$$\frac{4\pi d}{\lambda}=2n\pi \quad (n \text{ は整数}) \quad \cdots⑤$$

$d>0$ であるから

$$2d=n\lambda \quad (n \text{ は自然数})$$

である。音叉が壁のごく近くにあるときも考えれば，

$$2d=(n-1)\lambda \quad (n \text{ は自然数})$$

となる。

**注意**　実際には反射波は減衰しているため，④は

$$y=a\sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda}-\omega t+\frac{4\pi d}{\lambda}\right)+b\sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda}-\omega t\right)\ (0<a<b)\ \cdots⑥$$

の形となる。ここで，三角関数の合成を用いると

$$\begin{aligned}a\sin(x+\alpha)+b\sin x&=a(\sin x\cos\alpha+\cos x\sin\alpha)+b\sin x\\&=(a\cos\alpha+b)\sin x+a\sin\alpha\cos x\\&=\sqrt{(a\cos\alpha+b)^2+(a\sin\alpha)^2}\,\sin(x+\delta)\\&=\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\alpha}\,\sin(x+\delta)\end{aligned}$$

と変形できる。

$\alpha$ を動かしたときに振幅　$\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\alpha}$　が最大となるのは，

$$\cos\alpha=1 \quad \text{すなわち} \quad \alpha=2n\pi \quad (n \text{ は整数})$$

のときである。

したがって，⑥は

$$y=\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\frac{4\pi d}{\lambda}}\,\sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda}-\omega t+\delta\right)$$

と変形され，振幅　$\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\frac{4\pi d}{\lambda}}$　は位置 $x$ に依らないから，マイクロフォンの位置に依らない。また，⑤の条件は変わらない。

なお，　$\sqrt{a^2+b^2+2ab\cos\alpha}\ (0<a<b)$　の最大値は　$a+b$　，最小値は　$b-a$　である。

**問５　について**

問４より，音が強くなるのは　$2d=n\lambda$　（$n$ は自然数）のときである。強い音が観測された２か所は，　$n$　の値が１だけ違うときと考えられる。

１回目の実験から　　　$2\times50=n\lambda\cdots①$，$2\times81=(n+1)\lambda\cdots②$

２回目の実験から　　　$2\times49=n\lambda\cdots③$，$2\times83=(n+1)\lambda\cdots④$

②－①より　　$\lambda=62$　，④－③より　　$\lambda=68$　が得られる。

よって，λ の推定値は，２つの値の平均値を求めて　$\lambda=(62+68)\div2=65$　cm

振動数は 500Hz であったから，音速の推定値は

$$65\times500=32500 \text{ cm/s}$$

有効数字は２桁であるから，答えは　　$3.3\times10^2$　m/s である。

このように計算すれば，音速は求まってしまうが，　$\lambda=65$　を①，③の平均値の式に代入すると

$$2\times49.5=n\times65$$

よって　　$n\approx1.5$　となり，$n$ は整数に近くはない。

したがって，この問題は出題ミスであると言える。

**補足**

マイクロフォンが壁と音叉の間にあった場合はどうなるかを考察する。

このとき，①の変位と②の変位を合成すればよいから，合成された変位は

$$y=\sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda}-\omega t+\frac{4\pi d}{\lambda}\right)+\sin\left(\frac{2\pi x}{\lambda}+\omega t\right)$$

和積の公式　$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin(\frac{\alpha+\beta}{2})\cos(\frac{\alpha-\beta}{2})$　により

$$y=2\sin\left(\frac{2\pi(x+d)}{\lambda}\right)\cos\left(\omega t-\frac{2\pi d}{\lambda}\right)$$

$x$ を固定して，$y$ を $t$ の関数と考えると，振幅　$\left|2\sin\left(\frac{2\pi(x+d)}{\lambda}\right)\right|$　は $x$ の関数となる。

この振幅が最大となる位置 $x$ でマイクロフォンで観測される音が最も強くなるかというと，そうではない。密度と変位のと関係は次のようである。

正弦波では，空気が密な位置は，その両側から空気分子が寄ってくる位置で，空気が疎な位置は，その両側へ空気分子が離れて行く位置 である。よって，変位が正から負に変わる位置が密であり，変位が負から正に変わる位置が疎である。

一般には，点 $x$ における空気の密度を $\rho$，密度の平均値を $\rho_0$ とすると，　$\frac{\rho-\rho_0}{\rho_0}\approx-\frac{dy}{dx}$　が成り立つ。

したがって，　$-\frac{dy}{dx}$　が最大の位置が最も密であり，　$-\frac{dy}{dx}$　が最小の位置が最も疎になる。

$$-\frac{dy}{dx}=\frac{-4\pi}{\lambda}\cos\left(\frac{2\pi(x+d)}{\lambda}\right)\cos\left(\omega t-\frac{2\pi d}{\lambda}\right)$$

であるから，

$\sin\left(\frac{2\pi(x+d)}{\lambda}\right)=0$　となる位置は，変位は時間に依らず常に 0 であるが，　$\cos\left(\frac{2\pi(x+d)}{\lambda}\right)=\pm1$

となるから，密度は最も大きく変化する。

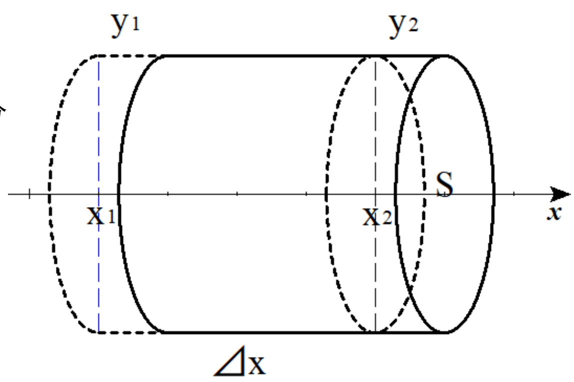
また，　$\sin\left(\frac{2\pi(x+d)}{\lambda}\right)=\pm1$　となる位置は，変位は時間の関数として最も大きく変化するが，

$\cos\left(\frac{2\pi(x+d)}{\lambda}\right)=0$　となるから，密度は一定である。

ところで，マイクロフォンで観測される音が最も強くなるのは，変位が最も大きく変化する位置か，密度が最も大きく変化する位置か，マイクロフォンによって異なる様である。

したがって，　$\left|2\sin\left(\frac{2\pi(x+d)}{\lambda}\right)\right|$　が最大となる位置でマイクロフォンで観測される音が最も強くなる，とは言えない。

性質　$\dfrac{\rho-\rho_0}{\rho_0}\approx-\dfrac{dy}{dx}$ を導出する。




右の図のような，波長に比べて十分小さな立体の部分の空気を考える。
$y_1$，$y_2$ はそれぞれ点 $x=x_1$，$x_2$ における変位である。

この立体の断面積を $S$ とすると，体積は
$$V=S(x_2-x_1)$$
である。
$\Delta x=x_2-x_1$，$\Delta y=y_2-y_1$ とおくと，$V$ の増分は

$$\Delta V=S(y_2-y_1)=S\Delta y=S\Delta x\cdot\frac{\Delta y}{\Delta x}\approx V\frac{dy}{dx}$$

であるから
$$\frac{\Delta V}{V}\approx\frac{dy}{dx}\qquad\cdots①$$

また，この部分の空気の質量を $M$，密度を $\rho$ とおくと
$$\rho=\frac{M}{V}\quad\text{より}\quad\Delta\rho\approx\frac{-M}{V^2}\Delta V=-\rho\frac{\Delta V}{V}$$

であるから
$$\frac{\Delta\rho}{\rho}\approx-\frac{\Delta V}{V}\qquad\cdots②$$

①，②より　$\dfrac{\Delta\rho}{\rho}\approx-\dfrac{dy}{dx}$　すなわち　$\dfrac{\rho-\rho_0}{\rho_0}\approx-\dfrac{dy}{dx}$

**疎密を用いた直感的な解説**

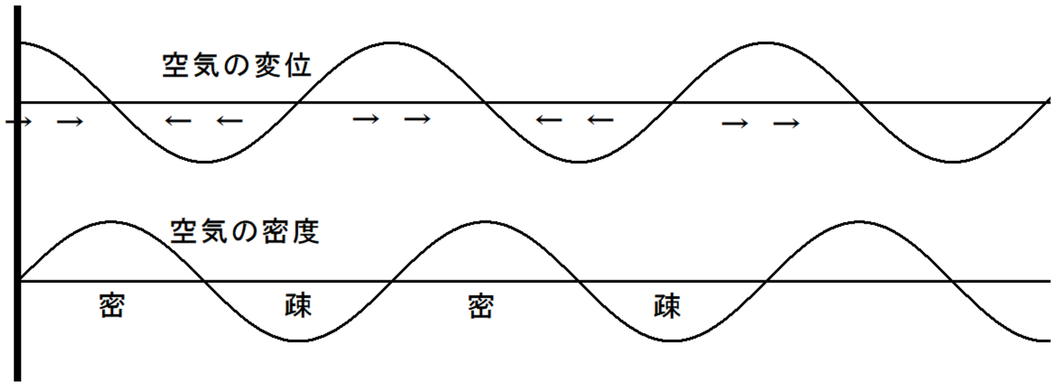
解説は難しいので，高校生は次のように考えるのが良いでしょう。
音叉の左右から出る音波の密の状態の部分をボールとイメージします。すると，音叉は 1 周期に一回，左右に同時にボールを投げていると考えられ，投げたボールと次に投げたボールの距離が λ です。このとき，壁に向かって投げて壁で反射したボールと，壁と逆方向に投げたボールが一体となって進む条件を考えます。そのときに音は強くなります。音叉と壁の間を往復する距離が 2d ですから，その条件は
$2d=n\lambda$（$n$ は自然数）です。
では，$2d=\left(n-\dfrac{1}{2}\right)\lambda$（$n$ は自然数）という答えはどのような場合にでるのでしょうか。

音叉の代わりに，板の支点を固定して板を叩いた場合を考えます。このとき，ボール（音波の密の状態の部分）は左右同時にではなく，左，右，左，右，……と交互に投げることになります。このときの

答えが　$2d=\left(n-\dfrac{1}{2}\right)\lambda$　（$n$ は自然数）です。

**〔3〕A の問 1 について**

音波における空気の変位と粗密の関係は，下の図のようになる。




円の中心は音叉の中心 O にあり，その半径は音波の波長にくらべて十分小さいので， B，D の位置は，音叉の腕の十分近くであると考えてよい。よって，音叉の腕が運動し開ききったとき， B，D の位置の空気の変位は，音波の進行方向に最大となる。このとき，上図より，B，D の位置の空気の密度は，疎でも密でもない。したがって，問 1 の選択肢に正しい組み合せはなく，問 1 は出題ミスではないかと考えられる。

**注**　空気の体積を $V$，圧力を $P$ とするとき，断熱変化では

$$PV^{\gamma}=\text{一定}\quad（\gamma \text{ は比熱比で，空気では約 } 1.4）$$

が近似的に成り立つことが知られている。これより

$$\log P+\gamma\, log V=\text{一定}$$

となるから

$$\frac{dP}{P}+\gamma\frac{dV}{V}=0$$

これと②を用いると， $P_0$ を気圧の平均値として

$$\frac{P-P_0}{P_0}\approx\gamma\frac{\rho-\rho_0}{\rho_0}$$

が成り立つ。