単振り子の厳密解

振り子の質量を m，速度を v，高さを h とし，糸の長さを l とし，重力加速度を g とする。運動エネルギーと位置エネルギーの和は一定であるから，振り子の最大の高さを h_0 とすると

$$\frac{1}{2}mv^2+mgh=mgh_0$$

$$v^2+2gh=2gh_0$$

振り子が振れる最大角を θ_0 とすると

$$\left(l\frac{d\theta}{dt}\right)^2+2gl(1-\cos\theta)=2gl(1-\cos\theta_0)$$

$$\left(l\frac{d\theta}{dt}\right)^2=2gl(\cos\theta-\cos\theta_0)$$

$$\frac{d\theta}{dt}=\sqrt{\frac{2g}{l}}\cdot\sqrt{\cos\theta-\cos\theta_0}$$

$$T=4\sqrt{\frac{l}{2g}}\cdot\int_0^{\theta_0}\frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta-\cos\theta_0}}=2\sqrt{\frac{2l}{g}}\cdot\int_0^{\theta_0}\frac{d\theta}{\sqrt{\cos\theta-\cos\theta_0}}$$

ここで

$$\cos\theta-\cos\theta_0=\left(1-2\sin^2\frac{\theta}{2}\right)-\left(1-2\sin^2\frac{\theta_0}{2}\right)$$

$$=2\left(\sin^2\frac{\theta_0}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}\right)$$

よって

$$T=2\sqrt{\frac{l}{g}}\cdot\int_0^{\theta_0}\frac{d\theta}{\sqrt{\sin^2\frac{\theta_0}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}}}$$

$\sin\frac{\theta}{2}=\sin\frac{\theta_0}{2}\sin\phi$ とおき，置換積分を行う。

$$\sqrt{\sin^2\frac{\theta_0}{2}-\sin^2\frac{\theta}{2}}=\sqrt{\sin^2\frac{\theta_0}{2}-\sin^2\frac{\theta_0}{2}\cdot\sin^2\phi}=\sqrt{\sin^2\frac{\theta_0}{2}\cdot\cos^2\phi}=\sin\frac{\theta_0}{2}\cdot\cos\phi$$

$$\cos\frac{\theta}{2}\cdot\frac{d\theta}{2}=\sin\frac{\theta_0}{2}\cos\phi\cdot d\phi$$ より $$d\theta=\frac{2\sin\frac{\theta_0}{2}\cos\phi}{\cos\frac{\theta}{2}}\cdot d\phi$$

であるから

$$T=4\sqrt{\frac{l}{g}}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\phi}{\cos\frac{\theta}{2}}=4\sqrt{\frac{l}{g}}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\phi}{\sqrt{1-\sin^2\frac{\theta_0}{2}\sin^2\phi}}\qquad\cdots\cdots①$$

振り子が振れる最大角が十分に小さいときの周期 T_0 は，①において $\theta_0=0$ とおけば求まり

$$T_0=4\sqrt{\frac{l}{g}}\cdot\int_0^{\frac{\pi}{2}}d\phi=2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}$$

と表される。

次に，度数法による角度に対する $\frac{T}{T_0}$ の値を求める十進 BASIC のプログラムと，その実行結果を示す。積分の近似値は，台形公式を用いた数値積分により求めた。積分値はほぼ正確である。

```
OPTION ARITHMETIC NATIVE
FOR kaku=0 TO 90 STEP 5
    LET r=simpson(SIN(kaku/180*PI/2))*2/pi
    PRINT kaku,r
NEXT kaku
END

EXTERNAL FUNCTION simpson(k)
OPTION ARITHMETIC NATIVE
DEF f(x)=1/SQR(1-(k*SIN(x))^2 )
LET a=0
LET b=PI/2
LET n=10
LET h=(b-a)/n
LET s=(f(a)+f(b))/2
FOR i=1 TO n-1
    LET s=s+f(a+h*i)
NEXT i
LET simpson=s*h
END FUNCTION
```

```
 0          1
 5          1.00047617248599
 10         1.00190718814322
 15         1.00430057917347
 20         1.00766902579155
 25         1.01203055030504
 30         1.01740879759596
 35         1.02383341137053
 40         1.03134051913004
 45         1.0399733431968
 50         1.04978296062303
 55         1.060829241848
 60         1.07318200714936
 65         1.08692245210315
 70         1.10214490963927
 75         1.11895903863095
 80         1.13749255992392
 85         1.15789470427982
 90         1.1803405990161
```