ニュートン法と類似のアルゴリズムによる円周率の計算法

補題　$0 \leqq \theta \leqq \pi$　とするとき，　$\theta+\arcsin(\cos\theta)=\dfrac{\pi}{2}$

証明　$0 \leqq \theta \leqq \pi$　より，　$-\dfrac{\pi}{2} \leqq \dfrac{\pi}{2}-\theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$　であるから

$$\arcsin(\cos\theta)=\arcsin\left(\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)\right)=\frac{\pi}{2}-\theta$$

よって　$\theta+\arcsin(\cos\theta)=\dfrac{\pi}{2}$

証明終

同様に，

$\sin\theta=\sin(\pi-\theta)$　より，　$\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{3\pi}{2}$　とするとき　$\theta+\arcsin(\sin\theta)=\pi$

$\cot\theta=\tan\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)$　より，　$0<\theta<\pi$ とするとき　$\theta+\arctan(\cot\theta)=\dfrac{\pi}{2}$

が成り立つ。

これを用いれば，初期値を $\theta \approx \dfrac{\pi}{2}$ として，正確な $\dfrac{\pi}{2}$ の値が求められる。

命題　$\theta'=\theta+\cos\theta$ とすると，

$\dfrac{\pi}{3}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$　ならば　$0<\dfrac{\pi}{2}-\theta'<\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)^3$

$\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{2\pi}{3}$　ならば　$0<\theta'-\dfrac{\pi}{2}<\dfrac{1}{4}\left(\theta-\dfrac{\pi}{2}\right)^3$

証明

$-1<x<1$ のとき，　$\arcsin x$ のマクローリン展開は次のようになる。

$$\arcsin x=x+\frac{1\cdot x^3}{2\cdot 3}+\frac{1\cdot 3\cdot x^5}{2\cdot 4\cdot 5}+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot x^7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7}+\cdots+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot\cdots\cdot(2n-1)x^{2n+1}}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdots 2n\cdot(2n+1)}+\cdots$$

よって

$$\arcsin x-x=\frac{1\cdot x^3}{2\cdot 3}+\frac{1\cdot 3\cdot x^5}{2\cdot 4\cdot 5}+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot x^7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 7}+\cdots+\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7\cdot\cdots\cdot(2n-1)x^{2n+1}}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8\cdots 2n\cdot(2n+1)}+\cdots$$

係数を a_n とすると

$$0<\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{2n+1}{2n+2}\cdot\frac{2n+1}{2n+3}<1$$

よって

$$0<a_n<a_1=\frac{1}{6}\quad(n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots\cdots)$$

したがって　$0<x<1$ のとき

$$\arcsin x-x<\frac{1}{6}(x^3+x^5+x^7+\cdots)=\frac{x^3}{6(1-x^2)}$$

特に　$x^2<\frac{1}{4}$　ならば　$\arcsin x-x<\frac{2x^3}{9}<\frac{1}{4}x^3$

ここで　$\frac{\pi}{3}<\theta<\frac{\pi}{2}$　を満たすとする。このとき $0<\cos^2\theta<\frac{1}{2}$ となるから

$$0<\arcsin(\cos\theta)-\cos\theta<\frac{\cos^3\theta}{4}$$

ここで，$\theta+\arcsin(\cos\theta)=\frac{\pi}{2}$ より

$$\arcsin(\cos\theta)-\cos\theta=\frac{\pi}{2}-(\theta+\cos\theta)$$

したがって

$$0<\frac{\pi}{2}-(\theta+\cos\theta)<\frac{\cos^3\theta}{4}$$

$\theta'=\theta+\cos\theta$ とすると，

$$0<\frac{\pi}{2}-\theta'<\frac{\cos^3\theta}{4}$$

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ より $0<\cos\theta<\frac{\pi}{2}-\theta$ であるから

$$0<\frac{\pi}{2}-\theta'<\frac{1}{4}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)^3$$

同様にして

$$\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{2\pi}{3}\quad\text{ならば}\quad 0<\theta'-\frac{\pi}{2}<\frac{1}{4}\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)^3$$

が示される。

証明終

上記の命題により，次のアルゴリズムで $\frac{\pi}{2}$ の近似値が求まる。

初期値を $\theta \approx \frac{\pi}{2}$ として

$$\theta := \theta + \cos\theta$$

を繰り返すと， θ は 3 次収束で $\frac{\pi}{2}$ に近づく。

以下は，理論を確かめるための，十進 BASIC によるプログラムです。

```
LET pai2=3/2
FOR i=1 TO 3
    LET pai2=pai2+COS(pai2)
    PRINT pai2*2
NEXT i
END
```

ニュートン法との関係

$\frac{\pi}{2}$ の値を求めるには，次の方程式を解けばよい。

$$\cos x = 0 \quad (0 < x < \pi)$$

ニュートン法で，この方程式の解の近似値を求めることを考える。

$f(x) = \cos x$ とおくと $f'(x) = -\sin x$

よって，関数 $y = \cos x$ のグラフ上の点 $(t, \cos t)$ における接線の方程式は

$$y = -(x-t)\sin t + \cos t$$

この接線の方程式において $y = 0$ とおくと

$$0 = -(x-t)\sin t + \cos t \quad \text{すなわち} \quad x = t + \frac{\cos t}{\sin t}$$

したがって，関数 $f(x) = \cos x$ のニュートン法による漸化式は，次のようになる。

$$x_{n+1} = x_n + \frac{\cos x_n}{\sin x_n}$$

では，ニュートン法による漸化式が　$x_{n+1}=x_n+\cos x_n$　となる関数　$f(x)$　を探してみよう。

ニュートン法では，漸化式は一般に

$$x_{n+1}=x_n-\frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

となるから，

$$-\frac{f(x)}{f'(x)}=\cos x$$

となる　$f(x)$　を求めればよい。これより

$$\frac{f'(x)}{f(x)}=-\frac{1}{\cos x}$$

よって

$$\{\log|f(x)|\}'=-\frac{1}{\cos x}$$

したがって

$$\log|f(x)|=-\int\frac{1}{\cos x}dx=\log\left(\frac{|\cos x|}{1+\sin x}\right)+C$$

よって，A，B を定数するとき

$$|f(x)|=\frac{A|\cos x|}{1+\sin x}\quad \text{すなわち}\quad f(x)=\frac{B\cos x}{1+\sin x}$$

となる。これは，　$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=0$　を満たす。

$B=1$　とすると，漸化式　$x_{n+1}=x_n+\cos x_n$　は，関数　$f(x)=\dfrac{\cos x}{1+\sin x}$　$\left(-\dfrac{\pi}{2}<x<\dfrac{3}{2}\pi\right)$　のニュートン法で得られることが分かる。

漸化式　$x_{n+1}=x_n+\cos x_n$　の加法定理による変形

多倍長演算において　$\cos x_n$　を高速に計算するために，漸化式　$x_{n+1}=x_n+\cos x_n$　を加法定理を用いて，次のように変形する。すると，　$\cos x_n$　に代わり　$\cos(x_{n+1}-x_n)$　を計算することになる。

公式　漸化式　$x_{n+1}=x_n+\cos x_n$　は次のように変形できる。

$$y_1=\cos x_1$$

$$z_n=1-\cos y_n,\ s_n=y_n-y_nz_n,\ t_n=z_n-y_nz_n$$

$$y_{n+1}=s_n\pm\sqrt{t_n(2s_n-t_n+2)}$$ （±の符号は y_n の符号と逆）

このとき， $x_{n+1}=x_1+\sum_{k=1}^{n} y_k$，$y_{n+1}=\cos x_{n+1}$ である。

証明　加法定理により

$$\cos x_{n+1}=\cos(x_n+x_{n+1}-x_n)=\cos x_n\cos(x_{n+1}-x_n)-\sin x_n\sin(x_{n+1}-x_n)$$

$x_{n+1}-x_n=\cos x_n$ であるから

$$\cos x_{n+1}=\cos x_n\cos(\cos x_n)-\sin x_n\sin(\cos x_n)$$

$y_n=\cos x_n$ とすると

$$y_{n+1}=\cos x_n\cos y_n-\sin x_n\sin y_n$$

公式 $\sin\theta=\pm\sqrt{1-\cos^2\theta}$ を用いると

$$\sin x_n\sin y_n=\pm\sqrt{(1-\cos^2 x_n)(1-\cos^2 y_n)}$$

ここで， $x_n\approx\frac{\pi}{2}$ より $\sin x_n\approx 1$，$\cos x_n\approx 0$ であるから $\sin x_n\sin y_n=\sin x_n\sin(\cos x_n)$ の符号は $\cos x_n$ の符号と一致する。

さらに変形して

$$\sin x_n\sin y_n=\pm\sqrt{(1-\cos x_n)(1-\cos y_n)(1+\cos x_n)(1+\cos y_n)}$$
$$=\pm\sqrt{\{1-(\cos x_n+\cos y_n)+\cos x_n\cos y_n\}\{1+(\cos x_n+\cos y_n)+\cos x_n\cos y_n\}}$$

$s_n=\cos x_n\cos y_n$，$t_n=1-(\cos x_n+\cos y_n)+\cos x_n\cos y_n$ とすると

$$\sin x_n\sin y_n=\pm\sqrt{t_n(2s_n-t_n+2)}$$

$z_n=1-\cos y_n$ とすると

$$s_n=y_n-y_nz_n,\quad t_n=z_n-y_nz_n$$
$$y_{n+1}=s_n\pm\sqrt{t_n(2s_n-t_n+2)}$$ （±の符号は y_n の符号と逆）

初期値を x_1 として $y_1=\cos x_1$ は直接計算する。このとき， $x_{n+1}-x_n=\cos x_n=y_n$ より

$$x_{n+1}=x_1+\sum_{k=1}^{n} y_k$$

証明終

この変形により余弦の加法定理の計算が，多倍長の積は２回，平方根は１回で済んだ。

多倍長演算において，Binary Splittling Algorithm(BSA 法)では， $\cos\left(\frac{1}{\sqrt{自然数}}\right)$ は高速に計算することができます。次のプログラムでは

$$\frac{\pi}{2}=1+\frac{1}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{23281}}+\cdots\cdots$$

と分解されて $\frac{\pi}{2}$ の近似値が求まります。

漸化式を以下のような変形します。

初項は $x_1=1,\ y_1=\cos x_1$ とする。

$$\arcsin|y_n|\approx\frac{1}{\sqrt{\text{自然数}}}=d_n$$

$$z_n=1-\cos d_n,\ s_n=y_n-y_n z_n,\ t_n=z_n-y_n z_n$$

$$y_{n+1}=s_n\pm\sqrt{t_n(2s_n-t_n+2)}$$ （±の符号は y_n の符号と逆）

このとき， $x_{n+1}=x_1\mp\sum_{k=1}^{n}d_k,\ y_{n+1}=\cos x_{n+1}$ である。

```
LET pi2=1
LET y=COS(1)
DO
  LET QQ=INT(1/y^2+1/6)
  LET d=1/SQR(QQ)
  LET z=1-COS(d)
  LET e=y*z
  LET s=y-e
  LET t=z-e
  IF y>0 THEN
    LET y=s-SQR(t*(2*s-t+2))
    LET pi2=pi2+d
  ELSE
    LET y=s+SQR(t*(2*s-t+2))
    LET pi2=pi2-d
  END IF
  PRINT pi2*2
LOOP WHILE ABS(y)>=1e-8
```

```
END
```

Binary Splittling Algorithm(BSA 法)を適用したプログラムを以下に示します。

```
OPTION ARITHMETIC DECIMAL_HIGH
LET pi2=1
LET n=INT(kosuu(1))
CALL BSA(P,Q,1,0,n-1)
LET y=1-P/Q
DO
  LET QQ=INT(1/y^2+1/6)
  LET n=INT(kosuu(QQ))
  CALL BSA(P,Q,QQ,0,n-1)
  LET z=P/Q
  LET e=y*z
  LET s=y-e
  LET t=z-e
  IF y>0 THEN
    LET y=s-SQR(t*(2*s-t+2))
    LET pi2=pi2+1/SQR(QQ)
    PRINT QQ
  ELSE
    LET y=s+SQR(t*(2*s-t+2))
    LET pi2=pi2-1/SQR(QQ)
    PRINT -QQ
  END IF
LOOP WHILE ABS(y)>=1E-333

LET pi2=pi2+y
PRINT pi2*2-PI
```

```
END

EXTERNAL FUNCTION  kosuu(QQ)
OPTION ARITHMETIC DECIMAL_HIGH
LET log_Q=LOG(QQ)/2
LET x=1000
FOR i=1 TO 5
   LET x=(x+LOG(10)*1000)/(LOG(x)+log_Q)
NEXT I
LET kosuu=x/2
END FUNCTION

EXTERNAL SUB BSA(P,Q,QQ,left,right)
OPTION ARITHMETIC DECIMAL_HIGH
IF right-left>0 THEN
   LET middle=INT((left+right)/2)
   CALL BSA(P0,Q0,QQ,left,MIDDLE)
   CALL BSA(P1,Q1,QQ,MIDDLE+1,right)
   LET P=P1+P0*Q1
   LET Q=Q0*Q1
ELSE
   LET P=-1
   LET Q=-(2*left+1)*(2*left+2)*QQ
END IF
END SUB
```