円周率の2乗は無理数である

証明　nを負でない整数として，関数 $f_n(x)$ と数列 $\{I_n\}$ を次の式で定める。

$$f_n(x)=\frac{1}{n!}\{x(\pi-x)\}^n \ ,\quad I_n=\int_0^\pi f_n(x)\sin x\,dx$$

$n\geqq 1$ のとき， $f_n(0)=f_n(\pi)=0$ を用いて部分積分をすると

$$\begin{aligned}I_n&=\int_0^\pi f_n(x)\sin x\,dx=-\int_0^\pi f_n(x)(\cos x)'dx\\&=-\left[f_n(x)\cos x\right]_0^\pi+\int_0^\pi f_n'(x)\cos x\,dx\\&=\int_0^\pi f_n'(x)\cos x\,dx=\int_0^\pi f_n'(x)(\sin x)'dx\\&=\left[f_n'(x)\sin x\right]_0^\pi-\int_0^\pi f_n''(x)\sin x\,dx\\&=-\int_0^\pi f_n''(x)\sin x\,dx \qquad \cdots①\end{aligned}$$

また， $n\geqq 1$ のとき

$$f_n'(x)=\frac{1}{(n-1)!}(\pi-2x)\{x(\pi-x)\}^{n-1}=(\pi-2x)f_{n-1}(x)$$

$n\geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned}f_n''(x)&=(\pi-2x)'f_{n-1}(x)+(\pi-2x)f_{n-1}'(x)\\&=-2f_{n-1}(x)+(\pi-2x)^2f_{n-2}(x)\\&=-2f_{n-1}(x)+\{-4x(\pi-x)+\pi^2\}f_{n-2}(x)\\&=-2f_{n-1}(x)-4(n-1)f_{n-1}(x)+\pi^2f_{n-2}(x)\\&=(-4n+2)f_{n-1}(x)+\pi^2f_{n-2}(x) \qquad \cdots②\end{aligned}$$

よって，①，②より， $n\geqq 2$ のとき

$$I_n=-\int_0^\pi\{(-4n+2)f_{n-1}(x)+\pi^2f_{n-2}(x)\}\sin x\,dx$$

したがって　$I_n=(4n-2)I_{n-1}-\pi^2I_{n-2} \qquad \cdots③$

また

$$I_0=\int_0^\pi \sin x\,dx=\left[-\cos x\right]_0^\pi=2$$

①より　$I_1=-\int_0^\pi(\pi x-x^2)''\sin x\,dx=\int_0^\pi 2\sin x\,dx=2\left[-\cos x\right]_0^\pi=4$

ここで， π^2 は有理数であると仮定する。このとき，正の整数 p，q を用いて $\pi^2=\dfrac{p}{q}$ と表すことができ，③は次のようになる。

$$I_n=(4n-2)I_{n-1}-\frac{p}{q}I_{n-2}$$

両辺に q^n を掛けて，

$$q^n I_n=(4n-2)q\cdot q^{n-1}I_{n-1}-pq\cdot q^{n-2}I_{n-2}$$

$q^n I_n=A_n$ とおくと

$$A_n=q(4n-2)A_{n-1}-pqA_{n-2}$$

$A_0=2$，$A_1=4q$ はともに整数であるから，この漸化式により，すべての負でない整数 n について A_n は整数であるといえる。また，

$$A_n=\int_0^{\pi}\frac{1}{n!}\{qx(\pi-x)\}^n\sin x\,dx$$

$n\geqq 1$ とするとき

$0<x<\pi$ において $0<\{qx(\pi-x)\}^n\sin x<(q\pi^2)^n\cdot 1=p^n$

よって

$0<\int_0^{\pi}\{qx(\pi-x)\}^n\sin x\,dx<\pi\cdot p^n$ であるから $0<A_n<\pi\cdot\frac{p^n}{n!}$

ここで，実数の性質により $2p\leqq m$ となる正の整数 m が存在し， $n>m$ のとき

$\frac{p^n}{n!}<\frac{p^m}{m!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-m}$ であるから $0<A_n<\pi\cdot\frac{p^m}{m!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-m}$

この不等式から，n が十分大きいときに $0<A_n<1$ となり， A_n が整数であることと矛盾する。

したがって， π^2 は有理数でない，すなわち無理数である。

証明終

π が有理数であると仮定すると， π^2 は有理数となり， π^2 が無理数であることと矛盾する。

よって，π は無理数である。

補足 $f_n(x)=\frac{1}{n!}\left(\frac{\pi^2}{4}-x^2\right)^n$ ， $I_n=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}f_n(x)\cos x\,dx$ としても同じ結果が得られる。

このとき， $A_n=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{n!}\left(\frac{p}{4}-qx^2\right)^n\cos x\,dx$ である。

参考文献

2003 年大阪大学理系後期試験問題 4 番

円周率の２乗は無理数である

補題１　$f(x)$ は $2n$ 次の整式で表された偶関数とする。このとき

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos x\,dx=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k f^{(2k)}\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

証明　$f'(x)$ は奇関数であるから $f'(0)=0$ である。よって

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)(\sin x)'\,dx$$

$$=\left[f(x)\sin x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(x)\sin x\,dx=f\left(\frac{\pi}{2}\right)-\int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(x)\sin x\,dx$$

$$=f\left(\frac{\pi}{2}\right)+\int_0^{\frac{\pi}{2}} f'(x)(\cos x)'\,dx=f\left(\frac{\pi}{2}\right)+\left[f'(x)\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}} f''(x)\cos x\,dx$$

$$=f\left(\frac{\pi}{2}\right)-\int_0^{\frac{\pi}{2}} f''(x)\cos x\,dx$$

$f''(x)$ は偶関数であるから，この操作は繰り返すことができて

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos x\,dx=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k f^{(2k)}\left(\frac{\pi}{2}\right)+(-1)^{n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}} f^{(2n+2)}(x)\cos x\,dx$$

ここで，$f(x)$ は $2n$ 次の整式で表された関数であるから，$f^{(2n+2)}(x)=0$ 。よって

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(x)\cos x\,dx=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k f^{(2k)}\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

証明終

補題２　p，q，n を正の整数として $\alpha=\sqrt{\dfrac{p}{q}}$，$f(x)=\dfrac{1}{n!}(p-qx^2)^n$ とする。

このとき，$f^{(2k)}(\alpha)$　$(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ は整数である。

証明　$2k<n$ のとき

整式 $f^{(2k)}(x)$ は $(p-qx^2)^{n-2k}$ を因数に持つから，$f^{(2k)}(\alpha)=0$ である。

$2k\geqq n$ のとき

$$f(x)=\frac{1}{n!}(p-qx^2)^n=\frac{1}{n!}\sum_{i=0}^{n}(-1)^i{}_nC_i\,p^{n-i}q^i x^{2i}$$

よって

$$f^{(2k)}(\alpha)=\sum_{i=k}^{n}\frac{{}_{2i}P_{2k}}{n!}(-1)^i{}_nC_i\,p^{n-i}q^i\alpha^{2(i-k)}$$

ここで，$n\leqq 2k\leqq 2i$ であり，連続する n 個の整数の積は $n!$の倍数だから $\dfrac{{}_{2i}P_{2k}}{n!}$ は整数。

また，　$q^i\alpha^{2(i-k)}=q^i\left(\frac{p}{q}\right)^{i-k}=p^{i-k}q^k$　より，　$q^i\alpha^{2(i-k)}$　は整数。

したがって，　$f^{(2k)}(\alpha)$　は整数である。

証明終

定理　π^2 は無理数である

証明　π^2 は有理数であると仮定する。このとき，正の整数 p，q を用いて $\left(\frac{\pi}{2}\right)^2=\frac{p}{q}$ と表される。

n を負でない整数として，関数　$f_n(x)$　と数列　$\{I_n\}$　を次の式で定める。

$$f_n(x)=\frac{1}{n!}(p-qx^2)^n \quad , \quad I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(x)\cos x\,dx$$

$n\geqq 1$　とするとき

$$0<x<\frac{\pi}{2} \quad \text{において} \quad 0<(p-qx^2)^n\cos x<p^n\cdot 1=p^n$$

よって

$$0<\int_0^{\frac{\pi}{2}}(p-qx^2)^n\cos x\,dx<\frac{\pi}{2}\cdot p^n \qquad \text{であるから} \qquad 0<I_n<\frac{\pi}{2}\cdot\frac{p^n}{n!}$$

ここで，実数の性質により　$2p\leqq m$　となる正の整数 m が存在し，　$n>m$　のとき

$$\frac{p^n}{n!}<\frac{p^m}{m!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-m} \qquad \text{であるから} \qquad 0<I_n<\frac{\pi}{2}\cdot\frac{p^m}{m!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-m}$$

この不等式から，n が十分大きいときに　$0<I_n<1$　となる。ところが，補題 1，2 により，　I_n　は整数であるから，矛盾する。

したがって，　π^2　は有理数でない，すなわち無理数である。

証明終

参考文献

IVAN NIVEN, A SIMPLE PROOF THAT π IS IRRATIONAL

M. Aigner and G. M. Ziegler, Proofs from THE BOOK Some irrational numbers

無理数性判定の補題

$g(x)=\cos x$，$G(x)=\sin x$ または $g(x)=\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}=\cosh x$，$G(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{2}=\sinh x$ とする。

$g(x)$ は偶関数，$G(x)$ は奇関数であり $G'(x)=g(x)$，$g''(x)=s\,g(x)$ $(s=\mp 1)$ を満たす。

ここで，p，q を正の整数として $\alpha=\sqrt{\dfrac{p}{q}}$ とする。このとき，$G(\alpha)$，$\alpha\, g(\alpha)$ がともに有理数になることはないことを示す。

n は負でない整数として，関数 $f_n(x)$ と数列 $\{I_n\}$ を次の式で定める。

$$f_n(x)=\frac{1}{n!}(p-qx^2)^n=\frac{q^n}{n!}(\alpha^2-x^2)^n \ ,\quad I_n=\int_0^\alpha f_n(x)\,g(x)\,dx$$

補題 1 n が十分大きければ，$I_n>0$

証明 $g(x)=\cosh x$ の場合と $g(x)=\cos x$，$0<\alpha\leqq\dfrac{\pi}{2}$ の場合は常に $I_n>0$ であるから，

$g(x)=\cos x$，$\alpha>\dfrac{\pi}{2}$ の場合を証明する。

$$\int_0^\alpha(\alpha^2-x^2)^n\cos x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\alpha^2-x^2)^n\cos x\,dx+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(\alpha^2-x^2)^n\cos x\,dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha}(\alpha^2-x^2)^n\cos x\,dx$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\alpha^2-x^2)^n\cos x\,dx>\left\{\alpha^2-\left(\frac{\pi}{4}\right)^2\right\}^n\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\pi}{4}$$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(\alpha^2-x^2)^n\cos x\,dx>0$$

$$\left|\int_{\frac{\pi}{2}}^{\alpha}(\alpha^2-x^2)^n\cos x\,dx\right|<\left\{\alpha^2-\left(\frac{\pi}{2}\right)^2\right\}^n\cdot 1\cdot\left(\alpha-\frac{\pi}{2}\right)$$

このとき $\alpha^2-\left(\dfrac{\pi}{4}\right)^2>\alpha^2-\left(\dfrac{\pi}{2}\right)^2>0$ であるから，題意は成り立つ。

証明終

補題 2 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}I_n=0$

証明 $-\alpha\leqq x\leqq\alpha$ において，

$|f_n(x)|\leqq\dfrac{p^n}{n!}$ であり，$|g(x)|\leqq M$ となる正の実数 M が存在するから，

$$|f_n(x)\,g(x)|\leqq\frac{M\cdot p^n}{n!}$$

よって

$$|I_n|=\left|\int_0^\alpha f_n(x)g(x)dx\right|\leqq\int_0^\alpha |f_n(x)g(x)|dx\leqq\alpha M\cdot\frac{p^n}{n!}\qquad\cdots①$$

実数の性質により　$2p\leqq m$　となる正の整数mが存在し，　$n>m$　のとき

$$0<\frac{p^n}{n!}<\frac{p^m}{m!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-m}$$

ここで

$$\lim_{n\to\infty}\frac{p^m}{m!}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-m}=0$$　であるから　$$\lim_{n\to\infty}\frac{p^n}{n!}=0$$

したがって，①より　$\lim_{n\to\infty}I_n=0$

証明終

補題 3　漸化式　$I_n=2sq\{(-2n+1)I_{n-1}+2pI_{n-2}\}$　$(n=2，3，4，\cdots)$　が成り立つ。

証明　$f_n(\alpha)=f_n'(0)=f_n'(\alpha)=0，g'(0)=0$　，　$g(x)=sg''(x)$　を用いて部分積分をすると

$$I_n=\int_0^\alpha f_n(x)g(x)dx=\int_0^\alpha f_n(x)sg''(x)dx$$
$$=s\left[f_n(x)g'(x)\right]_0^\alpha-s\int_0^\alpha f_n'(x)g'(x)dx$$
$$=-s\int_0^\alpha f_n'(x)g'(x)dx=-s\left[f_n'(x)g(x)\right]_0^\alpha+s\int_0^\alpha f_n''(x)g(x)dx$$
$$=s\int_0^\alpha f_n''(x)g(x)dx$$

ここで

$$f_n'(x)=\frac{1}{(n-1)!}(-2qx)(p-qx^2)^{n-1}=-2qxf_{n-1}(x)$$
$$f_n''(x)=-2q\{x'f_{n-1}(x)+xf_{n-1}'(x)\}$$
$$=-2q\{f_{n-1}(x)-2qx^2f_{n-2}(x)\}$$
$$=-2q[f_{n-1}(x)+\{2(p-qx^2)-2p\}f_{n-2}(x)]$$
$$=-2q\{f_{n-1}(x)+2(n-1)f_{n-1}(x)-2pf_{n-2}(x)\}$$
$$=2q\{(-2n+1)f_{n-1}(x)+2pf_{n-2}(x)\}$$

したがって

$$I_n=s\int_0^\alpha 2q\{(-2n+1)f_{n-1}(x)+2pf_{n-2}(x)\}g(x)dx$$
$$=s\{q(-4n+2)I_{n-1}+4pqI_{n-2}\}$$

証明終

補題 4　$G(\alpha)$，$\alpha g(\alpha)$ がともに有理数になることはない。

証明　$I_0=\int_0^\alpha g(x)\,dx=\big[G(x)\big]_0^\alpha=G(\alpha)$

$$I_1=-s\int_0^\alpha f_1{}'(x)g'(x)\,dx=-s\int_0^\alpha\{-2qxg'(x)\}\,dx$$
$$=2sq\left\{\big[xg(x)\big]_0^\alpha-\int_0^\alpha g(x)\,dx\right\}$$
$$=2sq\{\alpha g(\alpha)-G(\alpha)\}$$

$G(\alpha)$，$\alpha g(\alpha)$ がともに有理数であると仮定する。このとき，I_0，I_1 はともに有理数になる。

a は正の整数で aI_0，aI_1 の両方が整数になるものとして，$J_n=aI_n$ とおく。

すると，J_0，J_1 は整数であり，補題 3 より $n\geqq 2$ のとき $J_n=2sq\{(-2n+1)J_{n-1}+2pJ_{n-2}\}$ が成り立つから，任意の負でない整数 n について J_n は整数であるといえる。

ところが，補題 1 により n が十分大きいときに $J_n>0$ となり，補題 2 により $\lim_{n\to\infty}J_n=0$ となるから，整数 J_n は n が十分大きいときに $0<J_n<1$ となり矛盾する。

よって，$G(\alpha)$，$\alpha g(\alpha)$ がともに有理数になることはない。

証明終

補題 4 は，次のように表すことができる。

「θ を正の実数とするとき θ^2，$G(\theta)$，$\theta g(\theta)$ の少なくとも 1 つは無理数である。」

ここで，$g(-\theta)=g(\theta)$，$G(-\theta)=-G(\theta)$ が成り立つから

$$\theta^2,\ G(\theta),\ \theta g(\theta)\ \text{はすべて有理数} \Leftrightarrow (-\theta)^2,\ G(-\theta),\ (-\theta)g(-\theta)\ \text{はすべて有理数}$$

よって，次の補題を得る。

補題　θ を 0 でない実数とするとき，

(1)　θ^2，$\sin\theta$，$\theta\cos\theta$ の少なくとも 1 つは無理数である。

(2)　θ^2，$\sinh\theta$，$\theta\cosh\theta$ の少なくとも 1 つは無理数である。

定理　π^2 は無理数である。（これより，π は無理数である）

証明　$\left(\frac{\pi}{2}\right)^2$，$\sin\frac{\pi}{2}$，$\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}$ すなわち $\left(\frac{\pi}{2}\right)^2$，1，0 の少なくとも 1 つは無理数であるから，$\left(\frac{\pi}{2}\right)^2$ は無理数である。よって，π^2 は無理数である。

定理　r が 0 でない有理数のとき，　e^r　は無理数である。（特に e は無理数である）

証明　　e^r　が有理数であると仮定すると，　r^2，$\sinh r$，$r\cosh r$　はすべて有理数となり，補題に反する。よって，　e^r　は無理数である。

定理　r が 1 でない正の有理数のとき，　$\log r$　は無理数である。

証明　　$\log r$　が有理数であると仮定する。このとき，

$\sinh(\log r)=\dfrac{r-r^{-1}}{2}$　　$\cosh(\log r)=\dfrac{r+r^{-1}}{2}$　より　$(\log r)^2$，$\sinh(\log r)$，$(\log r)\cosh(\log r)$　はすべて有理数となり，補題に反する。よって，　$\log r$　は無理数である。

別証　　$\log r$　が 0 でない有理数 s であると仮定して　$\log r=s$　とおくと　$r=e^s$　となるが，定理により　e^s　は無理数であるから矛盾する。よって，　$\log r$　は無理数である。

例　r が 0 でない有理数のとき，　$\sin r$，$\cos r$　の少なくとも 1 つは無理数である。

証明　補題により　r^2，$\sin r$，$r\cos r$　の少なくとも 1 つは無理数であるから，　$\sin r$，$\cos r$　の少なくとも 1 つは無理数である。

例　　a，b，c　を正の整数として，　$a^2+b^2=c^2$　が成り立つとき，　$\arcsin\dfrac{a}{c}$　は無理数である。

証明　θ は　$\sin\theta=\dfrac{a}{c}$，$\cos\theta=\dfrac{b}{c}$　を満たすとするとき，　θ^2，$\sin\theta$，$\theta\cos\theta$　すなわち

θ^2，$\dfrac{a}{c}$，$\theta\cdot\dfrac{b}{c}$　の少なくとも 1 つは無理数であるから，θ は無理数である。したがって，

$\arcsin\dfrac{a}{c}$　は無理数である。