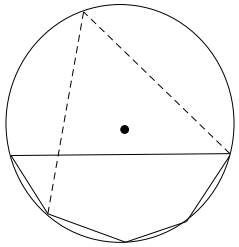
円に内接する n 角形の中で面積が最大となるのは正 n 角形である

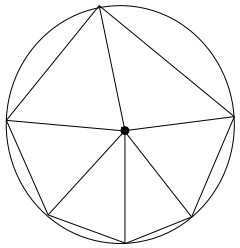
「円に内接する多角形の中で，正多角形が一番大きな面積を持つことの初等的証明」を高校生が考えたという話題を知りました。しかし，その証明は高校生が考えたとは思えない高度なもので，一般の高校生が理解するには難しいのではと感じました。そこで，難しい数式をなるべく用いない様に留意して，5 つの証明を考えました。

一定の半径の円に n 角形が内接しているとする。

円の中心が内接 n 角形の内部に無いとき，右図のように，1 つの頂点を円上で移動して，n 角形の内部に円の中心があり，かつ，面積が元の n 角形より大きい内接 n 角形を作ることができる。



正 n 角形で無い内接 n 角形で，n 角形の内部に円の中心が在るものを考える。n 角形の各頂点と円の中心を結び，n 角形を n 個の二等辺三角形に分ける。



$\theta=\dfrac{360^\circ}{n}$とし，次の操作を繰り返すと，操作を行う毎に内接 n 角形の面積は増加する。

ただし，$n-1$回以下の繰り返しで内接 n 角形は正 n 角形になるので，そのとき繰り返しを終了する。

操作

n 個の二等辺三角形の頂角の最小値をα，最大値をβとする。このとき$\alpha<\theta<\beta$である。

二等辺角形のある場所を入れ替えて，頂角がαとβの 2 つの二等辺三角形が隣り合うようにする。

このようにしても，内接 n 角形の面積は変わらない。

次に，頂角が α と β の 2 つの隣り合う二等辺三角形を，頂角が θ と $\alpha+\beta-\theta$ の 2 つの二等辺三角形に置き換える。これにより，2 つの二等辺三角形の面積の和は増加するから，内接 n 角形の面積は増加する。

上記の操作で 2 つの二等辺三角形の面積の和が増加することは，次の事から分かる。

$\alpha<\theta<\beta$ であるから

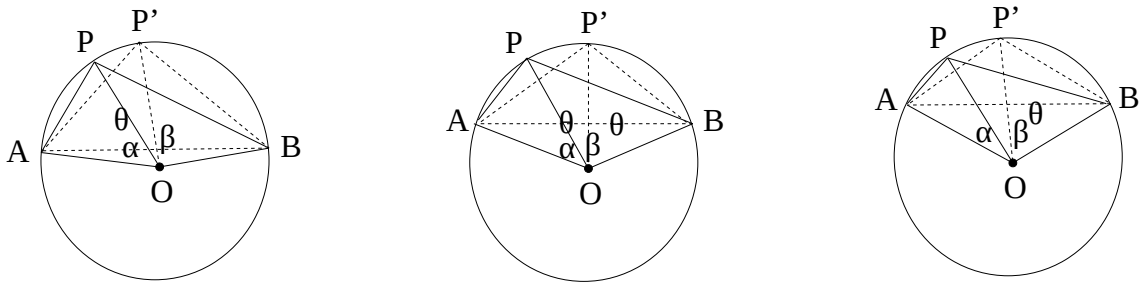
$\dfrac{\alpha+\beta}{2}>\theta$ のとき　　$\alpha<\theta<\dfrac{\alpha+\beta}{2}<\alpha+\beta-\theta<\beta$

$\dfrac{\alpha+\beta}{2}=\theta$ のとき　　$\alpha<\theta=\dfrac{\alpha+\beta}{2}=\alpha+\beta-\theta<\beta$

$\dfrac{\alpha+\beta}{2}<\theta$ のとき　　$\alpha<\alpha+\beta-\theta<\dfrac{\alpha+\beta}{2}<\theta<\beta$

下図において，点 P’は点 P より弧 AB の中央に近いから，△ABP と△ABP’の底辺を AB と考えたときの高さは△ABP’の方が大きい。よって，四角形 AOBP’の面積は四角形 AOBP の面積より大きい。

$\dfrac{\alpha+\beta}{2}>\theta$　　$\dfrac{\alpha+\beta}{2}=\theta$　　$\dfrac{\alpha+\beta}{2}<\theta$

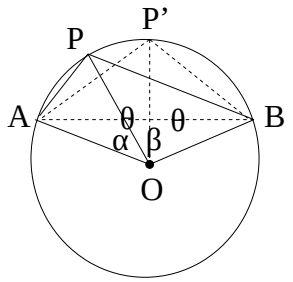


別証明

等辺がどれも同じ長さである2^k $(k \geqq 1)$個の二等辺三角形を要素とする集合をSとする。

操作

集合Sに対し，2個の二等辺三角形をペアとして次の置き換えを行う。



右図のように頂角がαとβの2つの二等辺三角形を隣り合わせ，頂角が$\theta=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$である合同な2つの二等辺三角形に置き換える。

これにより，合同な2つの二等辺三角形のペアが2^{k-1}組できるが，この置き換えによって二等辺三角形の面積の和は非減少である。

さらに，できたペアを1つずつに分けて，2^{k-1}個の二等辺三角形の集合Tを2つ作る。このとき，

Sの二等辺三角形の面積の和≦Tの二等辺三角形の面積の和の2倍

が成り立つ。また，Sには2^k個，Tには2^{k-1}個の二等辺三角形があり，Tにある二等辺三角形の頂角の和は，Sにある二等辺三角形の頂角の和の$\dfrac{1}{2}$である。

$n=2^k$ $(k=2,3,4,\cdots\cdots)$のとき

内接n角形の各頂点と円の中心を結び，内接n角形をn個の二等辺三角形に分けて，できた二等辺三角形の集合をSとする。

以下をk回繰り返すと，Sの二等辺三角形は1個だけとなる。

「操作」を行う

Tを新たなSとする。

この繰り返しを行ったとき，Sにある二等辺三角形の頂角は$\dfrac{360^\circ}{2^k}=\dfrac{360^\circ}{n}$であるから，その二等辺三角形の面積は，円に内接する正n角形の面積の$\dfrac{1}{n}$である。

元のn角形の面積は，Sにある頂角が$\dfrac{360^\circ}{n}$の二等辺三角形の面積の2^k倍以下であるから，円に内接するn角形の面積は，その円に内接する正n角形の面積以下である。

$n=2^k$ $(k=2,3,4,\cdots\cdots)$以外のとき

内接 n 角形の各頂点と円の中心を結び，内接 n 角形を n 個の二等辺三角形に分ける。これらの二等辺三角形の集合に，頂角が$\frac{360^\circ}{n}$の二等辺三角形を(2^k-n)個だけ加えた集合を S とする。ただし，$2^k>n$とする。

このとき，S にある二等辺三角形の頂角の和は

$$360^\circ+\frac{360^\circ}{n}\times(2^k-n)=\frac{360^\circ}{n}\times 2^k$$

である。

次の①，②を k 回繰り返すと，S の二等辺三角形は 1 個だけとなる。

① 「操作」を行う

② T を新たな S とする。

この繰り返しを行ったとき，S にある二等辺三角形の頂角は

$$\frac{360^\circ}{n}\times 2^k\div 2^k=\frac{360^\circ}{n}$$

であるから，その面積は円に内接する正 n 角形の面積の$\frac{1}{n}$である。

よって，元の n 角形の面積と頂角が$\frac{360^\circ}{n}$の二等辺三角形(2^k-n)個の面積の和は，頂角が$\frac{360^\circ}{n}$の二等辺三角形の面積の2^k倍以下である。

したがって， 頂角が$\frac{360^\circ}{n}$の二等辺三角形の面積を U とすると

$$\text{元の n 角形の面積}+U\times(2^k-n)\leqq U\times 2^k$$

であるから

$$\text{元の n 角形の面積}\leqq U\times n$$

ゆえに，円に内接する n 角形の面積は，その円に内接する正 n 角形の面積以下である。

別証明

$\theta=\dfrac{360^\circ}{n}$とし，次の操作を繰り返すと，操作を行う毎に内接 n 角形の面積は増加する。

操作

n 個の二等辺三角形の頂角の最小値を α，最大値を β とする。このとき $\alpha<\theta<\beta$ である。

二等辺角形のある場所を入れ替えて，頂角が α と β の 2 つの二等辺三角形が隣り合うようにする。

このようにしても，内接 n 角形の面積は変わらない。

次に，頂角が α と β の 2 つの隣り合う二等辺三角形を，頂角が$\dfrac{\alpha+\beta}{2}$の 2 つの二等辺三角形に置き換える。これにより，2 つの二等辺三角形の面積の和は増加するから，内接 n 角形の面積は増加する。

このとき，有限回の操作ですべての二等辺三角形の頂角が θ になれば操作を止める。そうで無く，操作を無限に繰り返すとき

$\alpha<\theta<\beta$であるから

$\dfrac{\alpha+\beta}{2}>\theta$のとき　　$0<\theta-\alpha<\beta-\theta$　かつ　$0<\dfrac{\alpha+\beta}{2}-\theta<\dfrac{1}{2}(\beta-\theta)$

$\dfrac{\alpha+\beta}{2}<\theta$のとき　　$0<\beta-\theta<\theta-\alpha$　かつ　$0<\theta-\dfrac{\alpha+\beta}{2}<\dfrac{1}{2}(\theta-\alpha)$

よって

$$\left|\frac{\alpha+\beta}{2}-\theta\right|<\frac{1}{2}\times(\text{n個の二等辺三角形の頂角と}\ \theta\ \text{との差の中の最大値})$$

すなわち，この操作により n 個の二等辺三角形の頂角の中で θ との差が最大のものが頂角 $\dfrac{\alpha+\beta}{2}$に置き換わり，θ との差が元の$\dfrac{1}{2}$より小さくなると言える。

したがって，操作を無限に繰り返すと，n 個の二等辺三角形の頂角と θ の差の最大値が限りなく 0 に近付くから，二等辺三角形の頂角はどれも限りなく θ に近付く。

例　二等辺三角形の頂角が 30°，50°，60°，90°，130°のとき，これらの頂角は次の様に変化してどれも限りなく 72°に近付く。

30	50	60	90	130
50	60	80	80	90
60	70	70	80	80

70	70	70	70	80
70	70	70	75	75
70	70	72.5	72.5	75
70	72.5	72.5	72.5	72.5
71.25	71.25	72.5	72.5	72.5

別証明（イェンセンの不等式を用いる方法）

半径 r の円に内接する n 角形の各頂点と円の中心を結び，n 個の二等辺三角形に分けたとき，二等辺三角形の頂角をθ_k $(k=1,\ 2,\ 3,\cdots,n)$とする。このとき，n 角形の面積は$\frac{1}{2}r^2\sum_{k=1}^{n}\sin\theta_k$である。

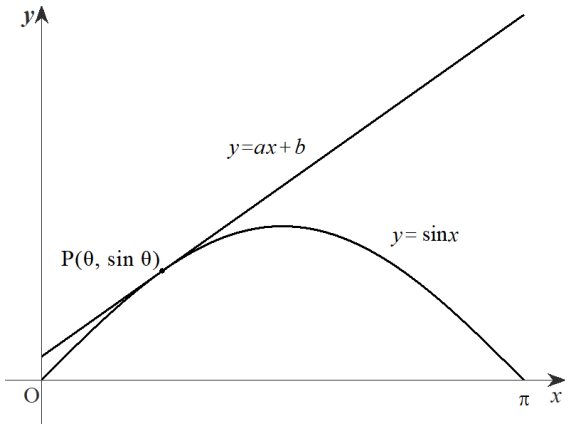
命題　関数$y=\sin x$ $(0<x<\pi)$のグラフは上に凸であるから，このグラフ上の点$P(\theta,\ \sin\theta)$における接線の方程式を$y=ax+b$とすると，$0<x<\pi$において次の不等式が成り立つ。

$$\sin x \leqq ax+b$$

等号は$x=\theta$のとき成立するから

$$\sin\theta=a\theta+b \quad \cdots①$$

である。



この命題において，$\theta=\frac{2\pi}{n}$としてa，bの値を定める。このとき，この命題により

$$\sum_{k=1}^{n}\sin\theta_k \leqq \sum_{k=1}^{n}(a\theta_k+b)$$

ここで，$\sum_{k=1}^{n}\theta_k=2\pi$と①を用いると

$$\sum_{k=1}^{n}(a\theta_k+b)=a\sum_{k=1}^{n}\theta_k+bn=2\pi a+bn=n\left(a\times\frac{2\pi}{n}+b\right)=n(a\theta+b)=n\sin\theta$$

であるから

$$\sum_{k=1}^{n}\sin\theta_k \leqq n\sin\theta \quad \cdots②$$

したがって

$$\frac{1}{2}r^2\sum_{k=1}^{n}\sin\theta_k \leqq \frac{1}{2}r^2\sin\theta\times n$$

すなわち

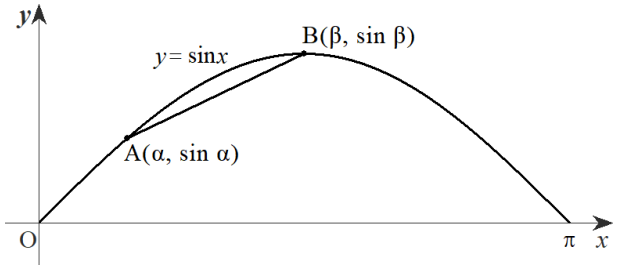
円に内接する n 角形の面積≦ 円に内接する正 n 角形の面積

②の不等式の別証明

関数$y=\sin x$ $(0<x<\pi)$のグラフは上に凸である。

このグラフ上に2点$A(\alpha,\ \sin\alpha)$，$B(\beta,\ \sin\beta)$

をとる。



m，nを正の実数とする。

$\alpha\neq\beta$のとき，線分ABはこのグラフの下側にあり，点$\left(\dfrac{n\alpha+m\beta}{m+n},\dfrac{n\sin\alpha+m\sin\beta}{m+n}\right)$は線分$AB$

上にある。よって

$$\frac{n\sin\alpha+m\sin\beta}{m+n}\leqq\sin\left(\frac{n\alpha+m\beta}{m+n}\right)\qquad(\text{等号が成り立つのは}\alpha=\beta\text{のとき})$$

が成り立つ。変形して

$$n\sin\alpha+m\sin\beta\leqq(n+m)\sin\left(\frac{n\alpha+m\beta}{n+m}\right)\quad\cdots③$$

命題　nを自然数として，$0<\theta_k<\pi$ $(k=1,\ 2,\ 3,\cdots,n)$のとき

$$\sin\theta_1+\sin\theta_2+\cdots+\sin\theta_n\leqq n\sin\left(\frac{\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_n}{n}\right)\quad\cdots④$$

証明　[1]　n=1のとき④は明らかに成り立つ。

[2]　n=kのとき④が成り立つと仮定すると

$$\sin\theta_1+\sin\theta_2+\cdots+\sin\theta_k\leqq k\sin\left(\frac{\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_k}{k}\right)$$

両辺に$\sin\theta_{k+1}$を足して，③を用いると，

$$\begin{aligned}\sin\theta_1+\sin\theta_2+\cdots+\sin\theta_k+\sin\theta_{k+1}&\leqq k\sin\left(\frac{\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_k}{k}\right)+\sin\theta_{k+1}\\&\leqq(k+1)\sin\left(\frac{\theta_1+\theta_2+\cdots+\theta_k+\theta_{k+1}}{k+1}\right)\end{aligned}$$

よって，n=k+1のときも④は成り立つ。

[1]，[2]から，すべての自然数nについて④は成り立つ。

この命題より，②が成り立つ。

②の不等式の別証明（平均値の定理を用いるが，点$P(\theta,\ \sin\theta)$における接線を用いる方法と同等）

$$\sum_{k=1}^{n}\sin\theta_k - n\sin\theta = \sum_{k=1}^{n}(\sin\theta_k - \sin\theta)$$

ここで，$(\sin x)'=\cos x$であるから，$\theta_k \neq \theta$のとき平均値の定理により

$$\sin\theta_k - \sin\theta = \cos\varphi_k \times (\theta_k - \theta)$$

を満たすφ_kが存在する。ただし

$\theta_k < \theta$のとき　$\theta_k < \varphi_k < \theta$

$\theta_k > \theta$のとき　$\theta < \varphi_k < \theta_k$

である。$\theta_k = \theta$のときは仮に$\cos\varphi_k = \cos\theta$と定めておく。このとき

$$\sum_{k=1}^{n}(\sin\theta_k - \sin\theta) = \sum_{k=1}^{n}\{\cos\varphi_k \times (\theta_k - \theta)\}$$

さらに，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(\theta_k - \theta) = 0$を用いると

$$\sum_{k=1}^{n}(\sin\theta_k - \sin\theta) = \sum_{k=1}^{n}\{\cos\varphi_k \times (\theta_k - \theta) - \cos\theta \times (\theta_k - \theta)\}$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\{(\cos\varphi_k - \cos\theta)(\theta_k - \theta)\}$$

ここで，関数$y = \cos x$は$0 < x < \pi$において減少する。よって

$\theta_k < \theta$のとき，$\theta_k < \varphi_k < \theta$より$\cos\varphi_k > \cos\theta$であるから　　$(\cos\varphi_k - \cos\theta)(\theta_k - \theta) < 0$

$\theta_k > \theta$のとき，$\theta < \varphi_k < \theta_k$より$\cos\varphi_k < \cos\theta$であるから　　$(\cos\varphi_k - \cos\theta)(\theta_k - \theta) < 0$

したがって

$$\sum_{k=1}^{n}\{(\cos\varphi_k - \cos\theta)(\theta_k - \theta)\} \leqq 0 \quad \text{となるから} \quad \sum_{k=1}^{n}(\sin\theta_k - \sin\theta) \leqq 0$$

ゆえに

$$\sum_{k=1}^{n}\sin\theta_k \leqq n\sin\theta$$

参考　以下の方法でも②が証明される。

数学Ⅲの知識による高校生向け証明　　http://horibe.jp/PDFBOX2023/PolygonInTheCircle.pdf

中学レベルの幾何の知識による証明　　https://www.youtube.com/watch?v=uriTiBXnIQM

別証明（高校生による証明からアイデアを得て）

頂角がαとβの２つの隣り合う二等辺三角形を，頂角が$\dfrac{\alpha+\beta}{2}$の２つの二等辺三角形に置き換える。

$\alpha\neq\beta$のときは２つの二等辺三角形の面積の和は増加するから，内接n角形の面積は増加する。これを一つずつ移動して限りなく繰り返すと，内接n角形は正n角形に限りなく近づくことを証明しよう。

二等辺三角形の頂角をθ_1，θ_2，$\cdots,\theta_n$とし，次のn個の作業を一纏めとして１つの操作Ａとし，この操作Ａを繰り返し行う。

$\dfrac{\theta_1+\theta_2}{2}$を新たな$\theta_1$，$\theta_2$とする。

$\dfrac{\theta_2+\theta_3}{2}$を新たな$\theta_2$，$\theta_3$とする。

…

$\dfrac{\theta_n+\theta_1}{2}$を新たな$\theta_n$，$\theta_1$とする。

操作Ａを２回行ったとき，新しくできたθ_1，θ_2，$\cdots,\theta_n$を$\theta_1{}'$，$\theta_2{}'$，$\cdots,\theta_n{}'$と記すことにすると，元のθ_1，θ_2，$\cdots,\theta_n$と有理数の定数$a_{k,j}$ $(k=1,\ 2,\ 3,\cdots,n\quad j=1,\ 2,\ 3,\cdots,n)$を用いて次のように表される。

$$\theta_k{}'=\sum_{j=1}^{n}(a_{k,j}\times\theta_j)$$

$a_{k,j}$は，次の２つを持つ。

$$\sum_{j=1}^{n}a_{k,j}=1\ \ (k=1,\ 2,\ 3,\cdots,n)$$

$$a_{k,j}>0\ \ (k=1,\ 2,\ 3,\cdots,n\quad j=1,\ 2,\ 3,\cdots,n)$$

注　操作Ａを１回しか行わなければ，２番目の性質は$a_{k,j}\geqq 0$となって，等号が入ってしまう。

ここで，$a_{k,j}$ $(k=1,\ 2,\ 3,\cdots,n\quad j=1,\ 2,\ 3,\cdots,n)$の最小値を$a$とする。

このとき，$a>0$であり，$\displaystyle\sum_{j=1}^{n}a\leqq\sum_{j=1}^{n}a_{k,j}$より$na\leqq 1$であるから，次が成り立つ。

$$0\leqq 1-na<1$$

θ_kの最小値をmとする。このとき，

$a_{k,j}-a\geqq 0$，$\theta_j\geqq m$であるから，$(a_{k,j}-a)\times\theta_j\geqq(a_{k,j}-a)\times m$

である。したがって

$$\theta_k{}'=\sum_{j=1}^{n}(a_{k,j}\times\theta_j)=\sum_{j=1}^{n}\{a\times\theta_j+(a_{k,j}-a)\times\theta_j\}\geqq\sum_{j=1}^{n}\{a\times\theta_j+(a_{k,j}-a)\times m\}$$
$$=a\sum_{j=1}^{n}\theta_j+m\sum_{j=1}^{n}(a_{k,j}-a)=2\pi a+m(1-na)$$

であるから

$$\theta_k{}'\geqq 2\pi a+m(1-na)$$

よって，$\theta_k{}'$の最小値をm'とすると

$$m'\geqq 2\pi a+m(1-na)$$

この不等式を変形して

$$\frac{2\pi}{n}-m'\leqq\frac{2\pi}{n}-\frac{2\pi}{n}\cdot na-(1-na)m$$

$$\frac{2\pi}{n}-m'\leqq(1-na)\left(\frac{2\pi}{n}-m\right)\quad\cdots①$$

これにおいて

$$\frac{2\pi}{n}-m\geqq 0,\ \frac{2\pi}{n}-m'\geqq 0,\ 0\leqq 1-na<1$$

よって，操作Aを$2\times i$回行ったときの θ_kの最小値をm_iとし，①を繰り返し用いると

$$\frac{2\pi}{n}-m_i\leqq(1-na)\left(\frac{2\pi}{n}-m_{i-1}\right)\leqq(1-na)^2\left(\frac{2\pi}{n}-m_{i-2}\right)\leqq\cdots\leqq(1-na)^i\left(\frac{2\pi}{n}-m\right)$$

となるから

$$0\leqq\frac{2\pi}{n}-m_i\leqq(1-na)^i\left(\frac{2\pi}{n}-m\right)$$

$0\leqq 1-na<1$より$\lim_{i\to\infty}(1-na)^i=0$であるから

$$\lim_{i\to\infty}\left(\frac{2\pi}{n}-m_i\right)=0\quad\text{すなわち}\quad\lim_{i\to\infty}m_i=\frac{2\pi}{n}$$

これと$\sum_{j=1}^{n}\theta_j=2\pi$から，操作Aを限りなく繰り返すとき，二等辺三角形のすべての頂角は$\frac{2\pi}{n}$に限りなく近づくと言える。

参考

高校生が書いた論文の日本語訳　https://transxcode.com/Document/Ensyuu/Ensyuu1.html