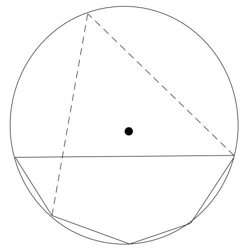
円に内接する n 角形の中で面積が最大となるのは正 n 角形である

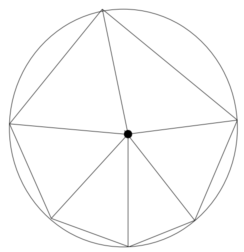
「円に内接する多角形の中で，正多角形が一番大きな面積を持つことの初等的証明」を高校生が考えたという話題を知りました。しかし，その証明は数学Ⅲを用いた高度なもので，一般の高校生が理解するには難しいのではと感じました。そこで，難しい数式を用いない証明を考えてみました。

一定の半径の円に n 角形が内接しているとする。

円の中心が内接 n 角形の内部に無いとき，右図のように，1 つの頂点を円上で移動して，n 角形の内部に円の中心があり，かつ，面積が元の n 角形より大きい内接 n 角形を作ることができる。



正 n 角形で無い内接 n 角形で，n 角形の内部に円の中心が在るものを考える。n 角形の各頂点と円の中心を結び，n 角形を n 個の二等辺三角形に分ける。



$\theta=\dfrac{360^\circ}{n}$ とし，次の操作を繰り返すと，操作を行う毎に内接 n 角形の面積は増加する。

ただし，$n-1$ 回以下の繰り返しで内接 n 角形は正 n 角形になるので，そのとき繰り返しを終了する。

操作

n 個の二等辺三角形の頂角の最小値を α，最大値を β とする。このとき $\alpha<\theta<\beta$ である。

二等辺角形のある場所を入れ替えて，頂角が α と β の 2 つの二等辺三角形が隣り合うようにする。

このようにしても，内接 n 角形の面積は変わらない。

次に，頂角が α と β の 2 つの隣り合う二等辺三角形を，頂角が θ と $\alpha+\beta-\theta$ の 2 つの二等辺三角形に置き換える。これにより，2 つの二等辺三角形の面積の和は増加するから，内接 n 角形の面積は増加する。

上記の操作で 2 つの二等辺三角形の面積の和が増加することは，次の事から分かる。

$\alpha<\theta<\beta$ であるから

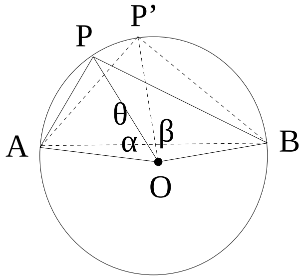
$\dfrac{\alpha+\beta}{2}>\theta$ のとき　　$\alpha<\theta<\dfrac{\alpha+\beta}{2}<\alpha+\beta-\theta<\beta$

$\dfrac{\alpha+\beta}{2}=\theta$ のとき　　$\alpha<\theta=\dfrac{\alpha+\beta}{2}=\alpha+\beta-\theta<\beta$

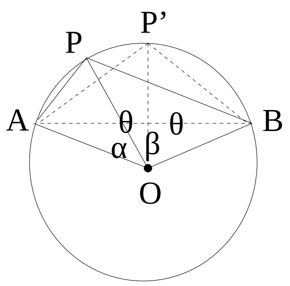
$\dfrac{\alpha+\beta}{2}<\theta$のとき　　　$\alpha<\alpha+\beta-\theta<\dfrac{\alpha+\beta}{2}<\theta<\beta$

下図において，点P’は点Pより弧ABの中央に近いから，△ABPと△ABP’の底辺をABと考えたときの高さは△ABP’の方が大きい。よって，四角形AOBP’の面積は四角形AOBPの面積より大きい。

$\dfrac{\alpha+\beta}{2}>\theta$



$\dfrac{\alpha+\beta}{2}=\theta$



$\dfrac{\alpha+\beta}{2}<\theta$