定理 1

m,n を $0<m<n$ を満たす自然数するとき

$$\arctan\left(\frac{m}{n}\right)=\arctan\left(\frac{1}{q}\right)+\arctan\left(\frac{m'}{n'}\right) \quad \text{かつ} \quad |m'|\leqq\frac{m}{2} \quad \text{かつ} \quad \left|\frac{m'}{n'}\right|<\left(\frac{m}{n}\right)^2$$

を満たす自然数 q, n' および整数 m' が存在する。

ここで，$\dfrac{m}{n}\cdot\dfrac{1}{1+\dfrac{m}{2n}}\leqq\dfrac{1}{q}\leqq\dfrac{m}{n}\cdot\dfrac{1}{1-\dfrac{m}{2n}}$ であるから $\dfrac{m}{n}$ が十分小さいとき，$\dfrac{1}{q}\approx\dfrac{m}{n}$ である。

証明

整数の性質により

$$n=mq+r \quad \cdots① \quad \text{ただし，} -\frac{m}{2}\leqq r\leqq\frac{m}{2}$$

を満たす自然数 q と整数 r が存在する。これを用いると

$$\frac{\dfrac{m}{n}-\dfrac{1}{q}}{1+\dfrac{m}{n}\cdot\dfrac{1}{q}}=\frac{mq-n}{nq+m}=\frac{-r}{nq+m}$$

よって

$$\arctan\left(\frac{m}{n}\right)-\arctan\left(\frac{1}{q}\right)=\arctan\left(\frac{-r}{nq+m}\right)$$

$-\dfrac{m}{2}\leqq r\leqq\dfrac{m}{2}$ であるから，$-r=m', nq+m=n'$ とおくと $|m'|\leqq\dfrac{m}{2}$ が成り立つ。

ここで，①より　$q=\dfrac{n-r}{m}$　であるから

$$\frac{-r}{nq+m}=\frac{-r}{\dfrac{n(n-r)}{m}+m}=\frac{m}{n}\cdot\frac{-r}{n-r+\dfrac{m^2}{n}}$$

よって

$$\left|\frac{-r}{nq+m}\right|=\frac{m}{n}\cdot\frac{|r|}{n-r+\dfrac{m^2}{n}}\leqq\frac{m}{n}\cdot\frac{\dfrac{m}{2}}{n-\dfrac{m}{2}}=\left(\frac{m}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{2-\dfrac{m}{n}}<\left(\frac{m}{n}\right)^2\cdot\frac{1}{2-1}=\left(\frac{m}{n}\right)^2$$

したがって，$\left|\dfrac{m'}{n'}\right|<\left(\dfrac{m}{n}\right)^2$

また，$\dfrac{1}{q}=\dfrac{m}{n-r}$　より　$\dfrac{m}{n+\dfrac{1}{2}m}\leqq\dfrac{1}{q}\leqq\dfrac{m}{n-\dfrac{1}{2}m}$

よって

$$\frac{m}{n}\cdot\frac{1}{1+\frac{m}{2n}}\leqq\frac{1}{q}\leqq\frac{m}{n}\cdot\frac{1}{1-\frac{m}{2n}}$$

$\frac{m}{n}$ が十分小さいとき，$\frac{1}{q}\approx\frac{m}{n}$ である。

□

定理２　任意の正の実数εに対して

$$\frac{\pi}{4}=l\arctan\left(\frac{1}{k}\right)+\arctan\left(\frac{m}{n}\right)\ \text{かつ}\ 0<\frac{1}{k}<\varepsilon\ \text{かつ}\ -\frac{\varepsilon}{2}<\frac{m}{n}<\frac{\varepsilon}{2}$$

となる自然数k, l, nと整数mが存在する。

証明

関数$y=\arctan(x)$は常に増加するから，$0<x<\varepsilon$とすると$0<\arctan(x)<\arctan\varepsilon$

よって，任意の正の実数εに対して　$0<\frac{1}{k}<\varepsilon$となる自然数$k$をとり，$\arctan\varepsilon=\varepsilon'$とおくと

$$0<\arctan\left(\frac{1}{k}\right)<\varepsilon'$$

このとき

$$\frac{\pi}{4}-\frac{\varepsilon'}{2}<l\arctan\left(\frac{1}{k}\right)<\frac{\pi}{4}+\frac{\varepsilon'}{2}$$

となる自然数lが存在する。よって

$$-\frac{\varepsilon'}{2}<\frac{\pi}{4}-l\arctan\left(\frac{1}{k}\right)<\frac{\varepsilon'}{2}$$

ここで

$$\frac{\pi}{4}=\arctan 1=l\arctan\left(\frac{1}{k}\right)+\left\{\arctan 1-l\arctan\left(\frac{1}{k}\right)\right\}$$

であり，加法定理を用いれば，mを整数，nを自然数として

$$\arctan 1-l\arctan\left(\frac{1}{k}\right)=\arctan\left(\frac{m}{n}\right)$$

と表せるから

$$-\frac{\varepsilon'}{2}<\arctan\left(\frac{m}{n}\right)<\frac{\varepsilon'}{2}$$

よって

$$-\frac{\arctan\varepsilon}{2}<\arctan\left(\frac{m}{n}\right)<\frac{\arctan\varepsilon}{2}$$

ここで

$$0<\frac{\arctan\varepsilon}{2}<\arctan\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$$

であるから

$$-\arctan\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)<\arctan\left(\frac{m}{n}\right)<\arctan\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)$$

したがって

$$-\frac{\varepsilon}{2}<\frac{m}{n}<\frac{\varepsilon}{2}$$

すなわち

$$\frac{\pi}{4}=l\arctan\left(\frac{1}{k}\right)+\arctan\left(\frac{m}{n}\right) \text{ かつ } 0<\frac{1}{k}<\varepsilon \text{ かつ } -\frac{\varepsilon}{2}<\frac{m}{n}<\frac{\varepsilon}{2}$$

となる自然数k, l, nと整数mが存在する。

□

定理３ 「項数」がいくらでも 0 に近い公式が存在する。

証明

まず，定理２により

$$\frac{\pi}{4}=l\arctan\left(\frac{1}{k}\right)+\arctan\left(\frac{m}{n}\right) \text{ かつ } 0<\frac{1}{k}<\varepsilon \text{ かつ } -\frac{\varepsilon}{2}<\frac{m}{n}<\frac{\varepsilon}{2}$$

の形に変形する。ただし，εが十分小さくなるようにk, l, m, nをとる。

次に，$\arctan(-x)=-\arctan x$が成り立つことに注意して$\arctan\left(\frac{m}{n}\right)$に対し，定理１の変形を繰り返すと，変形は有限回で終わり

$$\frac{\pi}{4}=l\arctan\left(\frac{1}{k}\right)+\arctan\left(\frac{1}{q_1}\right)+\arctan\left(\frac{1}{q_2}\right)+\cdots\cdots+\arctan\left(\frac{1}{q_N}\right)$$

の形になる。ここで，$q_1, q_2, \cdots\cdots, q_N$は整数である。

このとき，$\frac{m}{n}$は十分小さいから，$\frac{1}{q_1}\approx\frac{m}{n}$としてよい。（厳密さに欠けるが，問題はない）

したがって，近似的に

$$\left|\frac{1}{q_1}\right|<\frac{\varepsilon}{2},\ \left|\frac{1}{q_2}\right|<\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^2,\ \left|\frac{1}{q_3}\right|<\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^4,\ \cdots\cdots,\ \left|\frac{1}{q_N}\right|<\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{2^{N-1}}$$

として良い。$\frac{1}{\varepsilon}=M$とおくと，「項数」は

$$5000\left(\frac{1}{\log_{10}k}+\frac{1}{\log_{10}|q_1|}+\frac{1}{\log_{10}|q_2|}+\cdots\cdots+\frac{1}{\log_{10}|q_N|}\right)$$

$$=5000\left(\frac{1}{\log_{10}M}+\frac{1}{\log_{10}(2M)}+\frac{1}{\log_{10}(2M)^2}+\cdots\cdots+\frac{1}{\log_{10}(2M)^{2^{N-1}}}\right)$$

$$=5000\left\{\frac{1}{\log_{10}M}+\frac{1}{\log_{10}(2M)}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots\cdots+\frac{1}{2^{N-1}}\right)\right\}$$

$$=5000\left\{\frac{1}{\log_{10} M}+\frac{2}{\log_{10}(2M)}\cdot\left(1-\frac{1}{2^N}\right)\right\}$$

$$<5000\left(\frac{1}{\log_{10} M}+\frac{2}{\log_{10}(2M)}\right)$$

M は任意に大きくとれるから，「項数」がいくらでも 0 に近い公式が存在する。

□

例

arctan(1)-22arctan(1/28)

=arctan(1744507482180328366854565127/98646395734210062276153190241239)

すなわち

π/4=22arctan(1/28)

+arctan(1744507482180328366854565127/98646395734210062276153190241239)

=22arctan(1/28)+arctan(1/56547)

+arctan(1/20747394343)

+arctan(1/1112172624652580034840)

-arctan(1/16659543628852678157467292276729792021493732)

……

「項数」は概算で 5459 に成りそうです。

例　「項数」を 3000 未満にするには，arctan(1)-1420arctan(1/1808) を分解すればよく，「項数」は概算で 2771 です。

「項数」を 2000 未満にするには，arctan(1)-52174arctan(1/66430) を分解すればよく，「項数」は概算で 1965 です。

また，pi/4-5419351arctan(1/6900132)≒-3.75733E-17 となり，arctan(1)-5419351arctan(1/6900132) を分解すれば理論上は「項数」が 1340 程度に成りそうです。

なお，これらの計算には，白石和夫先生の十進 BASIC の有理数モードを使用しました。

arctan(1)の分解は，次の十進 BASIC のプログラムを有理数モードで実行することにより求められます。

```
DIM bit(16)
LET x=52174
FOR i=1 TO 16
    IF x>INT(x/2)*2 THEN LET bit(i)=1 ELSE LET bit(i)=0
    LET x=INT(x/2)
NEXT I
LET a=0
LET b=-1/66430
```

```
FOR i=16 TO 1 STEP -1
    LET a=(a+a)/(1-a*a)
    IF bit(i)=1 THEN   LET a=(a+b)/(1-a*b)
NEXT I
LET b=1
LET a=(a+b)/(1-a*b)
PRINT a
FOR I=1 TO 18
    IF a=0 THEN EXIT FOR
    LET b=-INT(1/a+0.5)
    LET b=1/b
    PRINT -b
    LET a=(a+b)/(1-a*b)
next I
PRINT a
END
```

効率が良い係数は，次の十進 BASIC のプログラムで求められます。

```
FOR i=2 TO 100000
    LET Arctan=ATN(1/i)
    LET a=PI/4/Arctan
    LET n=INT(a+0.5)
    LET sa=PI/4-n*Arctan
    LET kousuu=(1/LOG10(i)-2/LOG10(ABS(sa)))*5000
    IF kousuu <2000 THEN PRINT i,n,a-n,sa, kousuu
NEXT I
END
```